Teoria da Medida e Integração

Lista 4

Funções mensuráveis

1. Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$, e $E \in \mathcal{F}$, diremos que que $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável em E se $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_E = \{F \cap E; F \in \mathcal{F}\}$. Ou seja, se f é $\mathcal{F}_E$-mensurável. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{F}$-mensurável, então $f|_E$ é mensurável em E.

2. Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e $A \in \mathcal{F}$. Mostrar que se f e g são $\mathcal{F}$-mensuráveis, então f/g também é $\mathcal{F}$-mensurável no conjunto $\{x \in X; g(x) \neq 0\}$.

3. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}$, então f e sua derivada, f', são Borel-mesuráveis.

4. Dado $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida completo, mostre que

   a. Se f é mensurável e $f = g$ q.s., então g é mensurável;
   b. Se $f \leq g \leq h$, com f e h mensuráveis tal que $f = h$ q.s., então g é mensurável, $g = f$ q.s., e $g = h$ q.s.;
   c. Se $(f_n)_{n\geq 1}$ são mensuráveis e $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ q.s., então f é mensurável;

5. Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e seja $f : X \to \mathbb{R}$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

   (a) f é mensurável.
   (b) $\{f > q\} \in \mathcal{F}$ para cada $q \in \mathbb{Q}$.
   (c) $\{f \leq q\} \in \mathcal{F}$ para cada $q \in \mathbb{Q}$.

6. Seja f uma função mensurável definida em algum espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$ e seja $c > 0$. Mostre que

$$f_c(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq c \\ c, & \text{se } f(x) > c \\ -c, & \text{se } f(x) < -c \end{cases}$$

   é mensurável.

7. Mostre que se f é $\mathcal{F}$-mensurável então $|f|$ e f^2 também são $\mathcal{F}$-mensuráveis. Construa funções f e g não $\mathcal{F}$-mensuráveis, tais que $|f|$ e g^2 sejam $\mathcal{F}$-mensuráveis.

8. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é Borel-mensurável.

9. Mostre que mensurabilidade não é uma propriedade fechada para supremos e ínfimos não enumeráveis, seguindo os passos abaixo.

   a. Dado $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (conjunto de Vitali, por exemplo), mostre que A não é finito ou enumerável;

   b. Dado $c \in A$, mostre que $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_c(x) = \mathbb{I}_{\{c\}}(x)$ é mensurável à Borel;

   c. Mostre que $g(x) = \sup_{c \in A} f_c$ e $h(x) = \inf_{c \in A} f_c$ não são mensuráveis à Borel.