

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
Bases Matemáticas
Prova I

Escolha **apenas 5** questões:

1. Em busca da princesa, raptada por um dragão, o príncipe se deparou com três portas em um castelo. Ele sabia que atrás de uma das portas está a princesa, atrás da outra está um tigre e atrás da terceira não há nada. Cada uma das portas tinha uma inscrição:

1a porta: Aqui não há nem princesa nem tigre;

2a porta: Atrás da 3a porta não há ninguém;

3a porta: A princesa está aqui;

O príncipe sabia que as 3 inscrições são falsas, feitas pelo dragão para confundi-lo. Atrás de qual porta está a princesa?

Explique a sua resposta.

2. Suponhamos que o universo do discurso, \mathbb{U} , são todos os corpos celestes. Sejam definidas as seguintes proposições abertas:

$p(x, y)$ = 'corpo x é satélite do corpo y ';

$r(x, y)$ = ' x e y representam o mesmo corpo celeste'.

Com a seguinte proposição composta:

$$\exists y \in \mathbb{U} \text{ tal que } p(y, x) \wedge (\forall z \in \mathbb{U}, p(z, x) \implies r(z, y))$$

o que se pode concluir sobre o corpo celeste x ?

3. Dados $A, B \subset \mathbb{U}$. Mostre que $A \subset B^C$ se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.
4. Prove que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$, o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.
5. Determine para quais valores de $r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$, a implicação

$$|x + 3| < r \implies x^2 - 10x + 9 < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

é verdadeira.

6. Dado o conjunto universo $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, considere os seguintes subconjuntos

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $B = \{x \in \mathbb{U} | (x - 1)^2(x - 3) = 0\}$
- $C = \{x \in \mathbb{U} | x \text{ é ímpar}\}$

Determine

- (a) $(A \cup C)^C$;
- (b) $P(B)$ (conjunto das partes de B);
- (c) $(C \setminus A) \cap B^C$.