Teoria da Medida e Integração

Lista 5

Integração

1. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis, e $g \in L^+$, tais que $f_n \leq g$ q.s, para todo $n \geq 1$. Mostre que
$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

2. (***Necessidade das hipóteses do Teorema da Convergência Dominada***) Dado $M > 0$, encontre uma sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ de funções reais mensuráveis definidas em algum espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, tais que

   (i) $f = \lim_n f_n$ existe q.s.;

   (ii) $\int |f_n| d\mu < M$, para todo $n \geq 1$;

   mas com $\lim_n \int f_n d\mu \neq \int \lim_n f_n d\mu$.

3. (***Densidade das funções simples em*** L_1) Sejam $f \in L_1(X, \mu)$ e $\epsilon > 0$. Provar que existe uma função simples e integrável ϕ, tal que
$$\int |f - \phi| d\mu < \epsilon$$

4. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(\cdot, t)$ é $\mathcal{F}$-mensurável para cada $a \leq t \leq b$.

   a. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$
$$\lim_{t\to t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$$
   para todo $x \in X$, e que existe uma função g integrável tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo $t \in [a, b]$. Mostre que
$$\int f(x, t_0) d\mu = \lim_{t\to t_0} \int f(x, t) d\mu$$

   b. Suponha que a função $y(t) = f(\cdot, t)$ é contínua em $[a, b]$ para cada $x \in X$ e se existe uma função g integrável tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo $t \in [a, b]$. Mostre que a função
$$F(t) = \int f(x, t) d\mu$$
   é contínua $[a, b]$.

c. Suponha que a função $y(x) = f(x, t_0)$ é integrável em X para algum $t_0 \in [a, b]$. Assuma que existe $\frac{\partial f}{\partial t}$ em $X \times [a, b]$ e que existe g integrável tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Mostre que F é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{dF}{dt}(t) := \frac{d}{dt} \int f(x, t) d\mu = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu.$$

5. Seja $n \geq 2$ e $x \geq 0$. Mostre que $(1 + \frac{x}{n})^n \geq \frac{1}{4}x^2$ e verifique que a função $f(x) = (1 + \frac{x}{n})^{-n}$ é Lebesgue Integrável em $[1, \infty)$ e que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[1,\infty)} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dm = e^{-1}.$$

6. Sejam $X = [0, \infty)$, $\mathbb{B}_X$ os Borelianos de X e m a medida de Lebesque em X. Se f é uma função não negativa e contínua em X, prove que

$$\int f dm = \lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x) dx$$

7. Use o exercicío anterior para mostrar que

$$\int_{[0,\infty)} x^n e^{-x} dm = n!$$

8. Dado $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, seja μ a medida de contagem de A em $(X, \mathcal{P}(X))$, dada por $\mu(B) = card(A \cap B)$, $B \subset X$. Para $f : X \to \mathbb{R}$, encontre $\int f d\mu$.

9. (***Integrais para medidas discretas***) Generalizando a questão anterior, tome $A \subset X$ finito ou infinito enumerável, tome $p : A \to [0, \infty)$ e defina $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ a medida em $(X, \mathcal{P}(X))$ dada por

$$\mu(B) = \sum_{x \in A \cap B} p(x).$$

Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ é positiva, então

$$\int f d\mu = \sum_{x \in A} f(x) p(x).$$

10. Dados $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in L^+$, defina $\nu(A) = \int_A f d\mu$, $A \in \mathcal{F}$. Mostre que

    a. ν é uma medida em $(X, \mathcal{F})$;

    b. Se $g \in L^+ \cup L^1(\nu)$, então $\int g d\nu = \int g f d\mu$.

11. Dadas μ_1, μ_2 medidas em $(X, \mathcal{F})$, mostre que $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, dada por $\nu(A) := \mu_1(A) + \mu_2(A)$,

$A \in \mathcal{F}$, é medida em $(X, \mathcal{F})$ e que $\int f d\nu = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2$ para toda $f \in L^+ \cup L_1(\nu)$.

12. Seja $([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue. Seja $f_n(\omega) = \frac{e^{-n\omega}}{\sqrt{\omega}}$ e seja $I_n = \int f_n d\lambda$. Mostre que

    (a) $\lim f_n(\omega) = 0$.

    (b) $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$, onde $g(\omega) = \omega^{-\frac{1}{2}}$ se $0 < \omega < 1$ e $g(\omega) = e^{-\omega}$ se $\omega \geq 1$.

    (c) $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

13. Considere o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue na reta. Seja $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\{[0,n]\}}$ e seja $f = 0$. Mostre que a sequencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, mas que

$$\int f d\lambda \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda.$$

14. Mostre que se $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de medida finito e que se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sequencia de funções reais, mensuráveis e não negativas que converge uniformente para uma função real f, então

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

15. Seja $([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue em $[a,b]$. Seja f uma função continua e não negativa. Mostre que

$$\int f d\lambda = \int_a^b f(\omega) d\omega$$

    onde o lado direito denota a integral de Riemann.

16. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} f_n d\lambda = 0,$$

    onde $f_n(\omega) := \frac{n\sqrt{\omega}}{1+n^2x^2}$.

17. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida finito. Se f é $\mathcal{F}$-mensurável, seja $E_n = \{\omega : n-1 \leq |f(\omega)| < n\}$. Mostre que f é integrável se, e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) < \infty.$$