

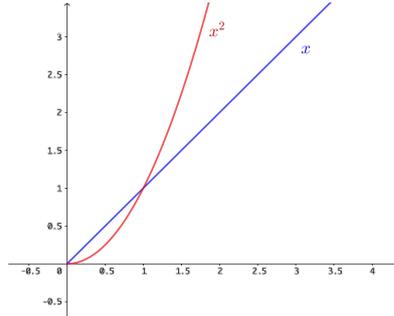
NOME:

RA:

BIS0003-15 - BASES MATEMÁTICAS

Prova 2

- (1 pt) Determine os valores reais de x que satisfazem $|x + 1 - |x - 1|| \leq 2x - 1$.
- Considere as funções $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.



- (1 pt) Mostre que a função $h(x) = x - x^2$ é crescente no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ e decrescente no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Observe que a função h mede a distância entre os pontos (x, x) e (x, x^2) .
Lembrete: h é crescente em $[a, b]$ quando $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$ e h é decrescente em $[a, b]$ quando $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$.
 - (1 pt) Conclua, utilizando o item (a) e informações sobre o gráfico da inversa, que a maior distância entre os pontos (x, x) e (x, \sqrt{x}) no intervalo $[0, 1]$ se dá em $x = \frac{1}{4}$ e é igual a $\frac{1}{4}$.
 - (1 pt) Use um argumento de translações verticais para mostrar que a equação $m + \sqrt{x} = x$ tem uma única solução quando $m > 0$ ou $m = -\frac{1}{4}$, duas soluções quando $-\frac{1}{4} < m \leq 0$ e nenhuma solução quando $m < -\frac{1}{4}$.
- Explique se cada função abaixo é injetora ou não, e se é sobrejetora ou não.
 - (1 pt) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 5n + 2$
 - (1 pt) $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, g(x) = 5x + 2$
 - (1 pt) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{x^2+1}$
 - (3 pts) Esboce o gráfico de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{x} - 2 \right| & \text{se } x > 0 \\ \text{sen}(\pi x) & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ (\log_2 |x|) - 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

exibindo as transformações utilizadas.

- Resolva os seguintes problemas, justificando sua resposta.

- (a) **(1 pt)** Uma caixa d'água de 1000 litros tem um furo no fundo, por onde escoa água a uma vazão constante. Ao meio-dia de certo dia ela foi cheia e às 18h desse dia, só tinha 850 litros. Quando a caixa ficará pela metade?
- (b) **(1 pt)** As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número em um intervalo de tempo de comprimento fixo é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo. Suponhamos que, inicialmente, haja 1000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, esse número tenha aumentado para 1500. Quantas bactérias haverá cinco horas após o início do experimento?
- (c) **(1 pt)** Um triângulo isósceles mede 4cm de base e 5cm de altura. Nele deve-se inscrever outro triângulo isósceles invertido, cuja base será paralela à base do primeiro e cujo vértice oposto à sua base será o ponto médio da base do primeiro. (Faça uma figura!) Qual a área máxima possível do triângulo invertido?