

Prova 2 - Tipo 1 - Gabarito

Segue abaixo o gabarito da prova 2. A prova está bastante extensa, e isso será levado em consideração na correção.

Algumas das soluções abaixo estão mais detalhadas do que seria necessário, e poderiam ser omitidos em uma solução tradicional.

Escolhi escrever deste modo, para que nenhum passo fique obscuro, e assim vocês possam estudar melhor.

1. **(3,0 pts)** Calcule os seguintes limites

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{(x + 4)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cosec}(3x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cosec}(3x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} = \frac{1}{3}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + x} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 2x) - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\frac{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + x}}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-2}}{9-x^2}$

Primeiro note que $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-2} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 3^+} 9-x^2 = 0$, o que implica que o quociente “explode”, tendendo então para $\pm\infty$.

Além disso, vale que $9-x^2 < 0$ se, e somente se, $x > 3$ ou $x < -3$.

Deste modo

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-2}}{9-x^2} = -\infty.$$

(e) Para calcular $\lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - 1| \cos\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)$, note que

$$-1 \leq \cos\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right) \leq 1,$$

e portanto

$$-|x^2 - 1| \leq |x^2 - 1| \cos\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right) \leq |x^2 - 1|.$$

Agora, como $\lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - 1| = \lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - 1| = 0$, segue do teorema do confronto que

$$\lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - 1| \cos\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right) = 0.$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + 2x^2 - 1}{3x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(-2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{-2}{3}$$

2. **(3,0 pts)** Determine se cada função abaixo é sobrejetora e/ou injetora, justificando cada afirmativa com uma demonstração ou contra-exemplo.

(a) $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}; f(x) = (x-1)^2$

- f não é sobrejetora. Para ver isso, tome $y = -1$, e note que para todo $x \geq 1$, $f(x) = (x-1)^2 > 0 > -1$ e portanto não existe $x \geq 1$ tal que $f(x) = -1$.
- f é injetora. Para mostrar isso, tome $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, e note que como $x_1 - 1 \geq 0$ e $x_2 - 1 \geq 0$, vale que

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \implies x_1 - 1 = x_2 - 1 \implies x_1 = x_2,$$

e portanto f é injetora.

(b) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}; f(n) = 2n + 1;$

- f é sobrejetora. Para mostrar isso, tome $r \in \mathbb{Q}$, e faça $n = \frac{r-1}{2}$. Note que $n \in \mathbb{Q}$ e

$$f(n) = 2n + 1 = 2 \left(\frac{r-1}{2} \right) + 1 = r - 1 + 1 = r.$$

(para encontrar o valor de n acima basta fazer

$$2n + 1 = r \Leftrightarrow 2n = r - 1 \Leftrightarrow n = \frac{r-1}{2},$$

mas isso não precisa aparecer na solução.)

- f é injetora. Para mostrar isso, tome $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, e note que

$$2r_1 + 1 = 2r_2 + 1 \Rightarrow 2r_1 = 2r_2 \Rightarrow r_1 = r_2,$$

e portanto f é injetora.

(c) $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \log_2(x^2 - 1)$

- f é sobrejetora. Para ver isso, tome $y \in \mathbb{R}$, e tome $x = \sqrt{2^y + 1}$. Note agora que $2^y + 1 > 1$ e portanto $x \in]1, +\infty[$. Além disso,

$$f(x) = \log_2(x^2 - 1) = \log_2((\sqrt{2^y + 1})^2 - 1) = \log_2(2^y + 1 - 1) = \log_2(2^y) = y.$$

(para encontrar o valor de x acima basta fazer

$$\log_2(x^2 - 1) = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2^y \Leftrightarrow x^2 = 2^y + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2^y + 1},$$

mas isso não precisa aparecer na solução.)

- f é injetora. Para mostrar isso, tome $x_1, x_2 \in]1, +\infty[$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, e note que como $\log_2(x)$ é uma função injetora, então

$$\log_2(x_1^2 - 1) = \log_2(x_2^2 - 1) \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

e portanto f é injetora.

3. **(3,0 pts)** Considere a função $f(x)$ definida abaixo, onde $c \in \mathbb{R}$, e faça o que se pede.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x - c & ; \text{ se } x < 2 \\ 2 + c & ; \text{ se } x = 2 \\ 8c \cdot \left(\frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} \right) & ; \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 8c \cdot \left(\frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 8c \cdot \left(\frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 8c \cdot \left(\frac{x + 2 - 4}{x - 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 8c \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} \right) \\ &= 8c \cdot \frac{1}{4} \\ &= 2c. \end{aligned}$$

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$;

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 - x - c = 8 - 2 - c = 6 - c.$$

(c) Encontre o valor de $c \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ seja contínua;

Note que f é contínua que todo $x \neq 2$. Para que f seja contínua em $x = 2$ precisamos que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2),$$

e portanto $2c = 6 - c = 2 + c$. Segue então que

$$c = 2.$$

(d) Mostre que, para o valor de c calculado no item anterior, $f(x)$ possui ao menos uma raiz no intervalo $]0, 7[$.

Para $c = 2$ temos $f(0) = -2$ e $f(7) = \frac{16}{5}$. Assim, como $f(x)$ é contínua em $[0, 7]$, e $f(0) < 0 < f(7)$, então, pelo teorema do valor intermediário, existe $x \in [0, 7]$ tal que $f(x) = 0$. Além disso, como $f(0) \neq 0$ e $f(7) \neq 0$, de onde segue que $x \in]0, 7[$.

4. **(2,0 pts)** Determine domínio maximal $D \subseteq \mathbb{R}$, de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^2}{\log(x+1)\sqrt{4-x^2}}$$

Para conseguir calcular a raiz no denominador precisamos que $4 - x^2 > 0$, o que implica em $x^2 < 4$, e portanto

$$-2 < x < 2.$$

Para calcular o logaritmo, precisamos que $x + 1 > 0$. Ou seja

$$x > -1.$$

Juntando as duas partes, é necessário então que $-2 < x < 2$ e $x > -1$. Ou seja,

$$-1 < x < 2.$$

Para terminar, note que o logaritmo está no denominador, de modo que é necessário que

$$\log(x+1) \neq 0,$$

e para isso precisamos $x + 1 \neq 1$. Ou seja, $x \neq 0$.

Temos assim que

$$D = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2 \text{ e } x \neq 0\} =]-1, 2[\setminus \{0\}.$$