Probabilidade: Teoria e Exercícios

Élcio Lebensztayn

Cristian Favio Coletti

IME–USP

2008

Sumário

Prefácio iii

Capítulo 1: Análise Combinatória 1

Exercícios . . . 3

Respostas . . . 11

Capítulo 2: Probabilidade 13

1. Definições e propriedades . . . 13
2. Probabilidade condicional e independência . . . 16

Exercícios . . . 18

Respostas . . . 25

Capítulo 3: Variáveis aleatórias 27

1. Definições . . . 27
2. Modelos de distribuições discretas . . . 29
3. Modelos de distribuições contínuas . . . 31
4. Aproximação de Poisson à Binomial . . . 33
5. Aproximação Normal à Binomial . . . 33
6. Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas . . . 34
7. Independência de variáveis aleatórias . . . 35
8. Funções de variáveis aleatórias . . . 36
9. Estatísticas de ordem . . . 38
10. Modelos multidimensionais . . . 39
11. Distribuições relacionadas com a normal . . . 40

Exercícios . . . 41

Respostas . . . 53

Capítulo 4: Esperança 57

1. Definições e propriedades . . . 57

2. Distribuição e esperança condicionais 59
3. Funções geradoras 61
4. Desigualdades 65
Exercícios 65
Respostas 81

Capítulo 5: Modos de Convergência e Teoremas Limites **85**
1. Modos de Convergência 85
2. Teoremas Limites 86
3. Outros Teoremas Limites 88
4. Teoremas auxiliares 89
Exercícios 89
Respostas 96

Distribuição Normal Padrão **97**

Referências Bibliográficas **99**

Prefácio

Este livro destina-se a estudantes de cursos de probabilidade em nível de Graduação e Mestrado. Foi concebido com o intuito de ser um material de estudo para os alunos da disciplina Introdução à Probabilidade, candidatos a ingressar no Mestrado em Estatística do Instituto de Matemática e Estatística da USP.

Os temas abordados são: Análise Combinatória, Probabilidade, Variáveis Aleatórias, Esperança e Teoremas Limites. No começo de cada capítulo, visando à recordação da matéria, reúnem-se em forma de tópicos as principais definições e resultados. Para mais detalhes e demonstrações, sugerimos ao leitor que consulte as referências bibliográficas. Ao final de cada capítulo, enunciam-se os exercícios correspondentes à teoria exposta, alguns dos quais têm a solução apresentada.

Cumpre-nos salientar que, por fins didáticos, decidimos definir os principais modos de convergência para tratar dos teoremas limites. Por ora, não abordamos o Lema de Borel-Cantelli. Esperamos que este trabalho possa ser útil não somente aos futuros mestrandos do IME–USP, como também a outros estudantes e docentes. Aceitaremos, com prazer, as críticas e sugestões que nos permitam aperfeiçoar o livro.

Finalmente, gostaríamos de expressar nosso profundo agradecimento aos professores com os quais convivemos nesses anos de formação acadêmica, em especial ao Prof. Fábio Prates Machado. Também à Comissão dos Cursos de Verão do IME–USP e à FAPESP, pelo apoio recebido.

Dezembro de 2007.

Os autores.

Capítulo 1

Análise Combinatória

1.1. Princípio multiplicativo: Uma tarefa deve ser executada em uma seqüência de r etapas. Existem n_1 maneiras de realizar a primeira etapa; para cada uma dessas n_1 maneiras, existem n_2 maneiras de realizar a segunda etapa; para cada uma dessas n_2 maneiras, existem n_3 maneiras de realizar a terceira etapa, e assim por diante. Então, o número total de maneiras de efetuar a tarefa completa é dado por $n_1\, n_2 \dots n_r$.

Observação. Ao usar o princípio multiplicativo, é fundamental que o número de maneiras de realizar uma determinada etapa não seja influenciado por nenhuma das etapas predecessoras.

1.2. Princípio aditivo para partes disjuntas: Se $A_1, \dots A_n$ são conjuntos dois a dois disjuntos, então

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Princípio da Inclusão-Exclusão: Em geral, devemos usar

$$\begin{aligned}\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| &= \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1}\, |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.\end{aligned}$$

1.3. Convém recordar uma técnica bastante útil em problemas de contagem: primeiro ignore uma restrição do problema, contando a mais. Depois, desconte o que foi indevidamente contado.

1.4. Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

1.5. Permutações: O número de maneiras de ordenar n objetos distintos é

$$n! = n\,(n-1) \dots 2\; 1.$$

O número $n!$ é chamado o fatorial de n. Por convenção, $0! = 1$.

Observação. Uma fórmula muito importante quando se trata de fatoriais foi obtida por Stirling (1730):

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

onde o símbolo $\sim$ indica que a razão entre os dois lados tende a 1 quando $n \to \infty$.

1.6. Permutações circulares: O número de maneiras de dispor n objetos distintos em torno de um círculo é $(n-1)!$.
Nessa contagem, interessa apenas a posição relativa dos objetos entre si, ou seja, duas disposições são consideradas indistinguíveis se uma pode ser obtida a partir da outra por uma rotação conveniente dos objetos.

1.7. O número de palavras de comprimento k que podem ser compostas com n elementos dados é n^k.

1.8. Arranjos: O número de k-subconjuntos *ordenados* de um n-conjunto é

$$(n)_k = n(n - 1) \dots (n-k+1).$$

1.9. Combinações: O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

que é chamado um *coeficiente binomial.* Estes números podem ser arrumados em uma disposição triangular, o famoso *Triângulo de Pascal*.

1.10. Teorema Binomial: Para quaisquer $n \geq 0$ inteiro e $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}.$$

1.11. O número de divisões possíveis de n objetos distintos em r grupos distintos de tamanhos respectivos $n_1, n_2, \dots, n_r$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n)$ é

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \dots\, n_r!}.$$

Esta fórmula também fornece o número de anagramas de uma palavra com n letras que contém n_1 vezes a letra ℓ_1, n_2 vezes a letra ℓ_2, $\dots$, n_r vezes a letra ℓ_r $(n_1+n_2+\cdots+n_r = n)$.

1.12. Para qualquer inteiro $p > 0$ fixado, o número de vetores distintos $(x_1, \ldots, x_n)$ não-negativos e a valores inteiros que satisfazem a equação $x_1 + \cdots + x_n = p$ é $\binom{p+n-1}{n-1}$. Esse é o chamado número de *combinações completas* (ou com repetição), pois é o número de modos de escolher p objetos entre n objetos distintos dados, podendo repetir a escolha (x_i é o número de vezes que tomamos o objeto i).

Em outras palavras, o número de maneiras de distribuir p moedas idênticas a n crianças é $\binom{p+n-1}{n-1}$.

1.13. Para qualquer inteiro $p > 0$ fixado, o número de vetores distintos $(x_1, \ldots, x_n)$ a valores inteiros que satisfazem $x_1 + \cdots + x_n = p$ e $x_i \geq 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ é $\binom{p-1}{n-1}$. Isto significa que o número de maneiras de distribuir p moedas idênticas a n crianças de forma que cada criança receba pelo menos uma moeda é $\binom{p-1}{n-1}$.

1.14. A tabela a seguir resume o número de maneiras de tomarmos uma amostra de tamanho k de uma população com n elementos distintos, dependendo se o mesmo objeto pode ser escolhido mais de uma vez (amostragem com ou sem reposição) e se vamos distinguir entre duas escolhas com os mesmos objetos escolhidos em ordem diferente (amostra ordenada ou não).

	Ordenada	Não-ordenada
Com reposição	n^k	$\binom{k+n-1}{n-1}$
Sem reposição	$(n)_k$	$\binom{n}{k}$

Exercícios

1. Quantas permutações diferentes existem das letras A, B, C, D, E, F

(a) que têm as letras A, B juntas em qualquer ordem?

(b) que têm a letra A em primeiro lugar ou a letra F em último?

(c) em que a letra A vem antes da letra B?

(d) em que a letra E não é a última?

Solução. (a) Imaginamos as letras A e B coladas como uma letra só, na ordem AB, o que fornece $5!$ permutações. Como também existem $5!$ permutações nas quais a letra B está imediatamente antes da letra A, obtemos um total de $2 \,.\, 5! = 240$ permutações diferentes.

(b) Sejam $\mathcal{A}$ o conjunto das permutações que começam por A e $\mathcal{F}$ o conjunto das permutações que terminam em F. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, o número de permutações que começam por A ou terminam em F é

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{F}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{F}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{F}| = 5! + 5! - 4! = 216.$$

(c) Existe um total de $6! = 720$ permutações possíveis, e existem tantas com A antes de B quantas com B antes de A, logo a resposta é 360.

(d) Existem $5!$ permutações em que a letra E é a última, portanto $6! - 5! = 600$ permutações em que E não é a última letra.

2. Numa prova, um estudante deve responder exatamente 7 questões de um total de 10 questões. Quantas escolhas ele tem? Quantas escolhas ele tem se entre as 7 questões deve responder pelo menos 3 das primeiras 5 questões?

Solução. O estudante deve escolher um subconjunto de tamanho 7 de um conjunto com 10 elementos, logo tem $\binom{10}{7} = 120$ escolhas.

No caso em que entre as 7 questões deve responder pelo menos 3 das primeiras 5 questões, o estudante possui três opções (disjuntas):

- Escolher exatamente 3 das primeiras 5 questões e 4 das 5 últimas;
- Escolher exatamente 4 das primeiras 5 questões e 3 das 5 últimas;
- Escolher as 5 primeiras questões e 2 das 5 últimas.

Assim, o total de escolhas que tem é

$$\binom{5}{3}\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\binom{5}{2} = 110.$$

Outra resposta para a segunda pergunta: $120 - \binom{5}{2}\binom{5}{5} = 110.$

3. Um pai compra 7 presentes diferentes (entre os quais, um videogame e um relógio) para dar a seus três filhos.

(a) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes entre os filhos, se decide dar 2 presentes ao filho mais velho, 2 presentes ao filho do meio e 3 presentes ao mais novo?

(b) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes, se, além da divisão 2 ao mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, ele resolve dar pelo menos um entre o videogame e o relógio ao filho mais velho?

(c) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes, se, além da divisão 2 ao mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, ele decide dar exatamente um entre o videogame e o relógio ao filho mais velho?

Solução. (a) O número de divisões possíveis de n objetos distintos em r grupos distintos de tamanhos respectivos $n_1, n_2, \ldots, n_r$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n)$ é

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}.$$

Assim, a resposta é

$$\binom{7}{2, 2, 3} = \frac{7!}{2!\, 2!\, 3!} = 210.$$

Outras respostas: • O pai dispõe os presentes numa fila, os dois primeiros destinados ao filho mais velho, os dois seguintes ao filho do meio e os três últimos ao mais novo. Existem 7! maneiras de ordenar os presentes, porém fixada uma ordenação entre os presentes, a ordem dos presentes de cada um dos filhos pode ser alterada, sem mudar a distribuição. Dessa forma, o pai tem $\dfrac{7!}{2!\,2!\,3!} = 210$ maneiras de distribuir os presentes.

• O pai escolhe 2 dos 7 presentes para o filho mais velho, o que pode fazer de $\binom{7}{2} = 21$ modos; em seguida, deve escolher 2 dos 5 presentes restantes para o filho do meio ($\binom{5}{2} = 10$ modos); os 3 presentes que sobram são do mais novo. A resposta é $21 \,.\, 10 = 210$.

(b) Sejam

n_v = Número de maneiras de dividir os presentes, sendo 2 ao filho mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, com o mais velho ganhando o videogame;

n_r = Número de maneiras de dividir os presentes, sendo 2 ao filho mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, com o mais velho ganhando o relógio;

n_{vr} = Número de maneiras de dividir os presentes, sendo o videogame e o relógio ao filho mais velho, 2 outros presentes ao do meio e 3 ao mais novo.

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, a resposta é dada por:

$$n_v + n_r - n_{vr} = 2 \,.\, \frac{6!}{1!\,2!\,3!} - \frac{5!}{2!\,3!} = 110.$$

Outra resposta: $210 - \binom{5}{2}\binom{5}{2} = 110$.

(c) Sejam

N_1 = Número de maneiras de dividir os presentes, sendo 2 ao filho mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, com o mais velho ganhando o videogame porém não o relógio;

N_2 = Número de maneiras de dividir os presentes, sendo 2 ao filho mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, com o mais velho ganhando o relógio porém não o videogame.

Uma forma de obter N_1 é observar que o pai tem $\binom{5}{1} = 5$ escolhas para o outro presente para o filho mais velho e $\binom{5}{2} = 10$ maneiras de dividir os 5 presentes restantes entre os filhos menores, logo $N_1 = 5 \,.\, 10 = 50$. (Outro modo seria notar que $N_1 = n_v - n_{vr}$). Analogamente, temos que $N_2 = 50$. Visto que N_1 e N_2 se referem a opções disjuntas, o número de maneiras é

$$N_1 + N_2 = 100.$$

Outra resposta: $110 - n_{vr} = 100$.

4. Quantos são os anagramas da palavra "COMBINATORIA"? (Considere O *sem acento*). Quantos deles começam por vogal ou terminam em consoante?

Solução. O número de permutações de n objetos, dos quais n_1 são do tipo 1, n_2 são do tipo 2, ..., n_k são do tipo k ($n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$) é

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_k!}.$$

A palavra "COMBINATORIA" tem 2A, 2I, 2O, 1B, 1C, 1M, 1N, 1R, 1T, logo o número total de anagramas (ordenações diferentes das letras) é

$$\frac{12!}{2!\,2!\,2!} = 59875200.$$

Outra resposta: Escolhemos 2 de 12 lugares para colocar as 2 letras A, o que pode ser feito de $\binom{12}{2} = 66$ modos; em seguida, devemos escolher 2 dos 10 lugares restantes para colocar as 2 letras I ($\binom{10}{2} = 45$ modos); a seguir, escolhemos 2 dos 8 lugares que restam para as 2 letras O ($\binom{8}{2} = 28$ modos) e finalmente temos 6 lugares para 6 letras distintas ($6! = 720$ modos). A resposta é $66 \,.\, 45 \,.\, 28 \,.\, 720 = 59875200$.

Sejam $\mathcal{V}$ o conjunto dos anagramas que começam por vogal e $\mathcal{C}$ o conjunto dos anagramas que terminam em consoante. A fim de obter $|\mathcal{V}|$, notamos que temos 3 escolhas para a vogal inicial e, feita essa escolha, $\frac{11!}{2!\,2!}$ formas de permutar as letras restantes. Para calcular $|\mathcal{C}|$, existem 6 escolhas para a consoante final e, tomada essa decisão, $\frac{11!}{2!\,2!\,2!}$ modos de permutar as letras restantes. Analogamente, $|\mathcal{V} \cap \mathcal{C}| = 3 \,.\, 6 \,.\, \frac{10!}{2!\,2!}$.
Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, concluímos que o número de anagramas que começam por vogal ou terminam em consoante é:

$$|\mathcal{V} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{V}| + |\mathcal{C}| - |\mathcal{V} \cap \mathcal{C}| = 3 \,.\, \frac{11!}{2!\,2!} + 6 \,.\, \frac{11!}{2!\,2!\,2!} - 3 \,.\, 6 \,.\, \frac{10!}{2!\,2!} = 43545600.$$

5. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números formados em ordem crescente. Determine:

(a) que lugar ocupa o número 62417.

(b) que número ocupa o 66º lugar.

(c) qual o 166º algarismo escrito.

(d) a soma dos números assim formados.

Solução. (a) Precisamos determinar quantos números antecedem o 62417. Antecedem-no todos os números começados em 1 ($4! = 24$), em 2 ($4! = 24$), em 4 ($4! = 24$), em 61 ($3! = 6$) e em 621 ($2! = 2$), logo 80 números. O número 62417 ocupa o 81º lugar.

(b) Contemos os números:

Começados por	**Quantidade**	**Acumulado**
1	$4! = 24$	24
2	$4! = 24$	48
41	$3! = 6$	54
42	$3! = 6$	60
46	$3! = 6$	66

Assim, o 66º número é o último (maior) que começa com 46, portanto o 46721.

(c) Visto que $166 = 5\,.\,33 + 1$, o 166º *algarismo* escrito é o primeiro do 34º número. Os 24 primeiros números começam por 1 e os 24 seguintes por 2, logo o 34º número começa por 2. Assim, o 166º algarismo escrito é 2.

(d) Iniciamos como se deve: somando as unidades dos números formados. Cada um dos algarismos 1, 2, 4, 6, 7 aparece como algarismo das unidades em 24 números, portanto a soma das unidades dos números é $24\,.\,(1+2+4+6+7) = 480$. Analogamente, a soma das dezenas é 480 dezenas, isto é, 4800. A soma das centenas é 48000, a das unidades de milhar é 480000 e a das dezenas de milhar é 4800000. A soma total fica então

$$480 + 4800 + 48000 + 480000 + 4800000 = 480\,.\,11111 = 5333280.$$

6. Quantos são os anagramas da palavra "PARAGUAIO" que não possuem consoantes adjacentes?

Solução. Arrumemos inicialmente as vogais, o que pode ser feito de $6!/3! = 120$ modos, e depois colocamos as consoantes de forma que não fiquem adjacentes. Arrumadas as vogais (digamos na ordem "AAUAIO"), temos 7 escolhas para a colocação do P, 6 para o R e 5 para o G. Assim, existem $120\,.\,7\,.\,6\,.\,5 = 25200$ anagramas de "PARAGUAIO" que não possuem consoantes adjacentes.

Outra resposta: Escolhida a ordem das consoantes, decidimos quantas vogais desejamos colocar nos quatro espaços disponíveis (de forma que não fiquem consoantes adjacentes) e finalmente permutamos as vogais. O total fica $3!\,\binom{7}{3}\,6!/3! = 25200$.

7. Quantos são os números inteiros positivos menores que 360 e primos com 360?

Solução. Notamos que $360 = 2^3\,.\,3^2\,.\,5$ e definimos os conjuntos

$$A = \{1, 2, \ldots, 360\},$$

$$A_1 = \{x \in A : x \text{ é múltiplo de } 2\},$$

$$A_2 = \{x \in A : x \text{ é múltiplo de } 3\},$$

$$A_3 = \{x \in A : x \text{ é múltiplo de } 5\}.$$

Desejamos calcular a cardinalidade do conjunto $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Porém,

$$|A_1| = \frac{360}{2} = 180, \qquad |A_1 \cap A_2| = \frac{360}{2\,.\,3} = 60, \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{360}{2\,.\,3\,.\,5} = 12.$$
$$|A_2| = \frac{360}{3} = 120, \qquad |A_1 \cap A_3| = \frac{360}{2\,.\,5} = 36,$$
$$|A_3| = \frac{360}{5} = 72, \qquad |A_2 \cap A_3| = \frac{360}{3\,.\,5} = 24,$$

Portanto, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 180 + 120 + 72 - 60 - 36 - 24 + 12 = 264.$$

Assim, existem ao todo 96 números inteiros positivos menores que 360 e primos com 360.

8. Uma bolsa contém 8 moedas de 1 real, 7 moedas de 50 centavos, 4 moedas de 25 centavos e 3 moedas de 10 centavos. De quantos modos diferentes podemos retirar 6 moedas dessa bolsa?

Solução. Definimos

x_1 : número de moedas de 1 real,

x_2 : número de moedas de 50 centavos,

x_3 : número de moedas de 25 centavos,

x_4 : número de moedas de 10 centavos.

Queremos obter o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 6$, satisfazendo as condições $x_1 \leq 8, x_2 \leq 7, x_3 \leq 4$ e $x_4 \leq 3$. Sejam os conjuntos

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\},$$
$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A : x_1 \geq 9\},$$
$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A : x_2 \geq 8\},$$
$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A : x_3 \geq 5\},$$
$$A_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A : x_4 \geq 4\}.$$

Então, o número pedido é $y = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. No entanto,

$$|A| = \binom{9}{3} = 84, \qquad |A_1| = |A_2| = 0, \qquad |A_3| = \binom{4}{3} = 4, \qquad |A_4| = \binom{5}{3} = 10,$$
$$|A_i \cap A_j| = 0,\ 1 \leq i < j \leq 4,$$
$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0,\ 1 \leq i < j < k \leq 4 \ \text{ e}$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0.$$

Usando o Princípio da Inclusão-Exclusão, obtemos que $y = 84 - 4 - 10 = 70$.

9. O conjunto A possui 3 elementos, e o conjunto B, 10 elementos. Quantas funções $f : A \to B$ existem? Quantas delas são injetoras?

10. De quantos modos podemos colocar dois reis diferentes em casas não-adjacentes de um tabuleiro 6×6? E se os reis fossem iguais?

11. (a) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?

(b) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas?

12. Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal

(a) podendo repetir algarismos?

(b) sem repetir algarismos?

13. Quantos números inteiros maiores que 53000 e de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

14. Cinco moças e cinco rapazes vão posar para uma fotografia, ocupando cinco degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique uma moça e um rapaz. De quantas maneiras podemos arrumar este grupo?

15. De quantos modos quatro casais podem sentar-se em torno de uma mesa redonda

(a) não sentando juntos dois homens?

(b) não sentando juntos dois homens e nenhum homem ficando perto de sua esposa?

16. De quantas maneiras se pode preencher um cartão da loteria esportiva (com 13 jogos) com três prognósticos duplos e dois triplos?

17. Sinais luminosos são transmitidos de uma ilha para a costa por meio de seis lâmpadas brancas e seis lâmpadas vermelhas, colocadas nos vértices de um hexágono regular, de tal modo que

(i) em cada vértice há duas lâmpadas de cores diferentes;

(ii) em cada vértice não há mais do que uma lâmpada acesa;

(iii) o número mínimo de vértices iluminados é três.

Determine o número total de sinais que podem ser transmitidos.

18. Suponha que João vai participar de uma reunião na qual estarão mais 4 homens e 6 mulheres. Ele sabe que há 4 casais, porém não conhece ninguém.

(a) De quantas formas poderia João imaginar que estão formados os casais?

(b) E se sabe que há exatamente 3 casais?

19. De quantos modos se podem repartir 27 livros diferentes entre Ana, Beto e Carla, de forma que Ana e Beto, juntos, recebam o dobro de livros de Carla e que ninguém fique sem livro?

20. Quantos são os anagramas da palavra "ARARAQUARA" que não possuem duas letras A juntas?

21. Quantos são os anagramas da palavra "CONTADORIA"

(a) em que aparecem juntas, nesta ordem, as letras da palavra CONTO?

(b) em que aparecem juntas, numa ordem qualquer, as letras da palavra CONTO?

(c) em que as letras da palavra CONTO aparecem nesta ordem?

22. De quantas maneiras se podem pintar seis esferas iguais, usando-se apenas três cores diferentes?

23. Obtenha uma fórmula para o número de soluções inteiras não-negativas da inequação

$$x_1 + \cdots + x_n \leq p \quad (p > 0 \text{ inteiro dado}).$$

24. Obtenha uma fórmula para o número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$x_1 + \cdots + x_n = p \quad (p > 0 \text{ inteiro dado})$$

satisfazendo $x_i \geq a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, onde $a_1, \ldots, a_n$ são inteiros não-negativos tais que $a_1 + \cdots + a_n \leq p$.

25. Representantes de dez países, incluindo a Rússia, França, Inglaterra e Estados Unidos, serão dispostos em uma fila. De quantas maneiras isso pode ser feito, se os representantes da França e da Inglaterra devem ficar um ao lado do outro, e o americano e o russo não devem?

26. Teresa pretende convidar 5 de 11 amigos para um jantar em sua casa.

(a) Quantas escolhas Teresa possui, se 2 dos 11 amigos são desafetos e não aceitam estar juntos?

(b) Quantas escolhas Teresa tem, se 3 dos 11 amigos não aceitam participar do jantar a menos que juntos?

27. Se quatro americanos, três franceses e três ingleses são colocados em uma fila, determine o número de maneiras de dispô-los de forma que nenhum grupo de mesma nacionalidade fique todo junto.

28. Quantos inteiros entre 1 e 33000 não são divisíveis por 3, por 5 e nem por 11?

29. Quantos inteiros entre 1 e 1000000 não são quadrados perfeitos, cubos perfeitos e nem quartas potências perfeitas?

30. Quantos números de n algarismos ($n \geq 3$) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3, de forma que em cada número figure cada um desses três algarismos pelo menos uma vez?

31. Quantos inteiros entre 1 e 10000 têm soma de seus algarismos igual a 23?

32. No elevador de um edifício entram seis pessoas. De quantas maneiras essas seis pessoas podem saltar no primeiro, segundo e terceiro andares, de forma que salte pelo menos uma pessoa em cada um desses andares?

33. De quantos modos podemos distribuir 3 moedas de 25 centavos, 5 moedas de 50 centavos e 4 moedas de 1 real entre dois meninos, de maneira que cada menino receba pelo menos uma moeda?

34. De quantas maneiras podemos distribuir 8 maçãs, 10 peras e 7 laranjas em quatro caixas, se cada caixa deve receber ao menos uma fruta?

35. Mostre que o produto de p números naturais consecutivos é divisível por $p!$.

36. Prove, usando um argumento combinatório, que

(a) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ para $0 < k \leq m \leq n$.

(b) $\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$ para $r \leq n, r \leq m$.

(c) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3 = 2^{n-3}\, n^2\,(n+3)$ para $n \geq 3$.

(d) $\dfrac{(3n)!}{2^n 3^n}$ é um número inteiro ($n \geq 1$).

(e) $\dfrac{(3n)!}{n!\,2^n 3^n}$ é um número inteiro ($n \geq 1$).

Sugestão: (c) Considere n pessoas e conte de duas formas diferentes o número de modos de escolher um grupo com pelo menos uma pessoa e selecionar desse grupo um presidente, um vice e um secretário, os cargos podendo ser cumulativos.
(d) e (e) Pense qual é o número de maneiras de separar $3\,n$ objetos distintos em n grupos de tamanho 3.

Respostas

9. 1000 funções, 720 injetoras

10. 1040, 520

11. (a) 756756 (b) 126126

12. (a) 45 (b) 41

13. 2160

14. 460800

15. (a) 144 (b) 12

16. 2279881890

17. 656

18. (a) 360 (b) 480

19. $\approx 1,23\,.\,10^{12}$

20. 120

21. (a) 360 (b) 21600 (c) 15120

22. 28

23. $\binom{p+n}{n}$

24. $\binom{p-a_1-\cdots-a_n+n-1}{n-1}$

25. 564480

26. (a) 378 (b) 84

27. 3079296

28. 16000

29. 998910

30. $3^n - 3\,.\,2^n + 3$

31. 480

32. 540

33. 118

34. 5464800

Capítulo 2

Probabilidade

1. Definições e propriedades

1.1. Um experimento é *aleatório* se, ao ser repetido nas mesmas condições, é impossível prever antecipadamente o resultado. Em contrapartida, um experimento é *determinístico* se, quando repetido nas mesmas condições, conduz ao mesmo resultado.

Denominamos *espaço amostral* o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, e o denotamos por Ω. Um subconjunto $A \subset \Omega$ é chamado *evento*.

Dados dois eventos A e B, dizemos que $A \subset B$ se $\omega \in A$ implica que $\omega \in B$. Em palavras, a ocorrência de A implica a ocorrência de B.

A *união* de dois eventos A e B é $A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$ e representa o evento de que pelo menos um dos dois eventos A e B ocorre.

A *intersecção* de dois eventos A e B é $A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$ e representa o evento de que ambos A e B ocorrem.

Dois eventos A e B são *disjuntos* ou *mutuamente exclusivos* se $A \cap B = \varnothing$. Isso significa que A e B não ocorrem simultaneamente.

Para qualquer evento A, o *complementar* de A é $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ e representa o evento de que A não ocorre.

1.2. Leis de De Morgan:

$$(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \cap_{i=1}^{\infty} A_i^c, \tag{DM1}$$

$$(\cap_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \cup_{i=1}^{\infty} A_i^c. \tag{DM2}$$

Notamos que (DM1) estabelece que o evento de que nenhum dos A_i's ocorre é igual ao complementar do evento de que pelo menos um dos A_i's ocorre. Já (DM2) expressa que o complementar do evento de que todos os A_i's ocorrem é exatamente o evento de que ao menos um deles não ocorre.

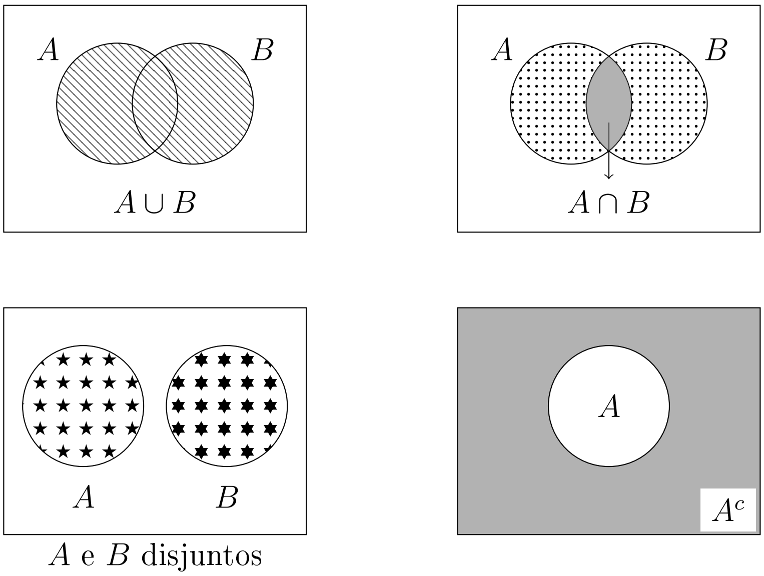


Figura 2.1: União e intersecção dos eventos A e B; A e B disjuntos; Complementar de A.

1.3. Definição clássica (Cardano (1663), De Moivre (1718), Laplace (1812)): Seja Ω finito e suponhamos que cada subconjunto elementar de Ω é igualmente provável. Então, para qualquer $A \subset \Omega$, definimos a probabilidade de A como

$$P(A) = \frac{|\,A\,|}{|\,\Omega\,|}.$$

Observação. A definição anterior formaliza a primeira definição conhecida de probabilidade: "relação entre o número de casos favoráveis ao acontecimento (evento) e o número total de casos possíveis, supondo todos os casos igualmente possíveis".

1.4. Definição axiomática (Kolmogorov (1933)): Uma *probabilidade* é uma função $P(\cdot)$ a valores reais definida em uma classe $\mathcal{F}$ de eventos de um espaço amostral Ω, que satisfaz as seguintes condições:

(A1) $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \in \mathcal{F}$,

(A2) $P(\Omega) = 1$,

(A3) Aditividade enumerável: para qualquer seqüência $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ de eventos dois a dois disjuntos,

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é chamada um *espaço de probabilidade*.

Observação. No caso de Ω finito ou infinito enumerável, podemos definir a probabilidade na classe $\mathcal{F}$ de todos os subconjuntos de Ω, a qual é usualmente denotada por 2^{Ω} ou $\mathcal{P}(\Omega)$ (conjunto das partes de Ω). Neste caso, escrevendo Ω como $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, associamos a cada ω_i, $i = 1, 2, \ldots$, um número $p(\omega_i)$ tal que $p(\omega_i) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1$. Para $i = 1, 2, \ldots$, $p(\omega_i)$ é a probabilidade do evento simples $\{\omega_i\}$. A probabilidade de um evento $A \subset \Omega$ é definida por

$$P(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} p(\omega_i).$$

Quando Ω é infinito não-enumerável, é em geral impossível associar uma probabilidade bem definida a todos os subconjuntos de Ω. Define-se então uma probabilidade em uma classe mais restrita de subconjuntos de Ω; apenas esses subconjuntos são denominados eventos. O ponto essencial é que essa classe contém todos os subconjuntos (eventos) de interesse prático. Um exemplo importante é Ω igual a um intervalo da reta, para o qual se considera a classe de subconjuntos conhecida como σ-álgebra de Borel. Para mais detalhes sobre esse tema, sem ainda abordar profundamente a Teoria da Medida, veja-se o livro de James [6].

1.5. Propriedades de uma probabilidade:

1. $P(\varnothing) = 0$.

2. Aditividade finita: Se $A_1, \ldots, A_n$ são eventos dois a dois disjuntos, então
$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

3. $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo evento A.

4. Para quaisquer eventos A e B, $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$.

5. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

6. Para quaisquer eventos A e B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

7. Princípio da Inclusão-Exclusão: Para qualquer seqüência finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de eventos,
$$P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n).$$

8. Continuidade por baixo: Se $A_n \uparrow A$ quando $n \to \infty$, então $P(A_n) \uparrow P(A)$ quando $n \to \infty$.

   Observação. $A_n \uparrow A$ significa que $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n e $A = \bigcup_n A_n$.

   $P(A_n) \uparrow P(A)$ quer dizer que $P(A_n) \leq P(A_{n+1})$ para todo n e $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

9. Subaditividade enumerável: Para qualquer seqüência $A_1, A_2, \ldots$ de eventos,
$$P\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^\infty P(A_i).$$

2. Probabilidade condicional e independência

2.1. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Para eventos A e B com $P(B) > 0$, a *probabilidade condicional* de A dado que B ocorreu é definida por
$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

2.2. Regra da multiplicação (ou da probabilidade composta): Se $A_1, A_2, \ldots A_n$ são eventos com $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, então
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\; P(A_2 \,|\, A_1)\; \ldots\; P(A_n \,|\, A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

2.3. Condicionamento: Se A e B são eventos com $0 < P(B) < 1$, então
$$P(A) = P(A \,|\, B)\, P(B) + P(A \,|\, B^c)\, P(B^c).$$

2.4. Fórmula da probabilidade total: Seja $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω em eventos de probabilidade positiva, isto é, esses eventos são dois a dois disjuntos, $\Omega = \bigcup_{i=1}^n B_i$ e $P(B_i) > 0$ para todo i. Então, para qualquer evento A,
$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \,|\, B_i)\, P(B_i).$$

2.5. Fórmula de Bayes (1763): Seja $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω em eventos de probabilidade positiva. Se A é um evento com $P(A) > 0$, então, para todo $j = 1, \ldots, n$,

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)\, P(B_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i)}.$$

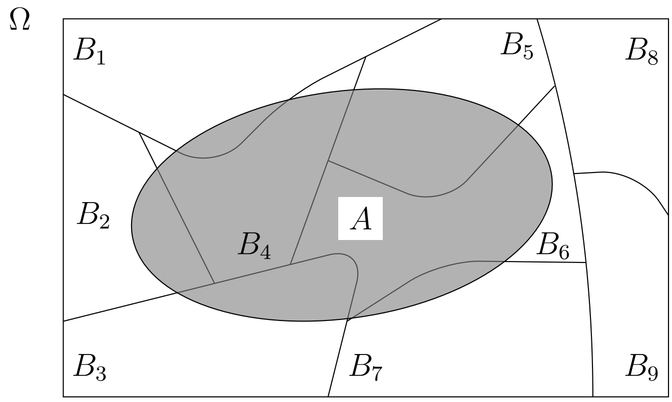


Figura 2.2: Partição de Ω em $\{B_1, B_2, \ldots, B_9\}$ e um evento A.

2.6. Para um evento B fixado tal que $P(B) > 0$, temos que $P(\cdot \mid B)$ é uma probabilidade.

2.7. Dois eventos A e B são *independentes* se $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.

Observação. Em palavras, A e B são independentes se o conhecimento da ocorrência de um deles não influencia a probabilidade do outro.

2.8. Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são *independentes* se para qualquer escolha de k ($2 \leq k \leq n$) e índices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k}).$$

2.9. Uma coleção infinita de eventos é *independente* se toda subcoleção finita desses eventos é independente.

2.10. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes, então, para qualquer escolha de B_j com $B_j = A_j$ ou A_j^c,

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1)\, P(B_2) \ldots P(B_n).$$

2.11. Freqüentemente, um experimento aleatório consiste em realizar uma seqüência de ensaios (subexperimentos). Por exemplo, se o experimento aleatório é lançar uma moeda repetidamente, cada lançamento pode ser considerado como um ensaio. Neste caso, dizer que os ensaios são *independentes* significa dizer que a seguinte condição é válida: se A_i é um evento cuja ocorrência é completamente determinada pelo resultado do i-ésimo ensaio, então $A_1, A_2, \ldots$ são independentes.

Exercícios

1. Sejam A, B e C três eventos em um espaço de probabilidade. Expresse os seguintes eventos em termos de A, B e C:

(a) Apenas A ocorre;

(b) A e B ocorrem, mas C não ocorre;

(c) Os três eventos ocorrem;

(d) Pelo menos um dos três eventos ocorre;

(e) Nenhum dos três eventos ocorre;

(f) Exatamente um dos três eventos ocorre;

(g) No máximo um dos três eventos ocorre;

(h) Pelo menos dois dos três eventos ocorrem.

2. Um baralho comum consiste de 52 cartas separadas em 4 naipes com 13 cartas de cada um. Para cada naipe, os valores das cartas são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K e A. Um baralho comum é embaralhado. Qual é a probabilidade de que as quatro cartas do topo tenham

(a) valores diferentes?

(b) naipes diferentes?

Solução. Se consideramos como relevante a ordem entre as quatro cartas do topo, então o espaço amostral consiste de $52 \,.\, 51 \,.\, 50 \,.\, 49$ resultados. Além disso, existem $52 \,.\, 48 \,.\, 44 \,.\, 40$ resultados em que as cartas têm valores diferentes e $52 \,.\, 39 \,.\, 26 \,.\, 13$ resultados em que as cartas têm naipes diferentes. Portanto, assumindo que o "embaralhamento" significa que cada resultado no espaço amostral é igualmente provável, temos que as probabilidades desejadas são

$$\text{(a)}\ \frac{52 \,.\, 48 \,.\, 44 \,.\, 40}{52 \,.\, 51 \,.\, 50 \,.\, 49} \approx 0,676; \qquad \text{(b)}\ \frac{52 \,.\, 39 \,.\, 26 \,.\, 13}{52 \,.\, 51 \,.\, 50 \,.\, 49} \approx 0,105.$$

Observação. Claramente as mesmas respostas seriam obtidas se considerássemos as quatro cartas do topo como um conjunto não ordenado de cartas.

3. Em uma classe, estudam dez crianças, entre as quais os irmãos Ana e Beto. A professora decide separar ao acaso a turma em dois grupos de cinco crianças cada um; o primeiro grupo fará um trabalho sobre os planetas e o segundo sobre as civilizações antigas. Qual é a probabilidade de que os irmãos Ana e Beto façam parte do mesmo grupo? Há alguma diferença (no raciocício e no resultado) se ambos os grupos farão trabalhos sobre o mesmo assunto?

4. Extraem-se 4 cartas de um baralho com 52 cartas. Qual é a probabilidade de que 2 sejam pretas e 2 vermelhas?

5. Qual é a probabilidade de que os aniversários de doze pessoas sejam em meses diferentes? E a probabilidade de que os aniversários de seis pessoas sejam em dois meses?

6. Uma caixa contém 40 parafusos bons e 10 defeituosos. Seleciona-se uma amostra de 5 parafusos. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

(a) nenhum parafuso na amostra é defeituoso.

(b) nenhum, um ou dois parafusos na amostra são defeituosos.

(c) a amostra contém pelo menos um parafuso bom.

7. Distribuímos 12 bolas em 5 caixas numeradas 1, 2, 3, 4, 5. Calcule a probabilidade da caixa 1 conter exatamente 3 bolas se

(a) as bolas são distinguíveis.

(b) as bolas são indistinguíveis.

8. Os clubes de xadrez de duas escolas consistem, respectivamente, de 8 e 9 jogadores. Quatro membros de cada clube são escolhidos ao acaso para participar de uma competição entre as duas escolas. Os jogadores selecionados de uma equipe são pareados aleatoriamente com aqueles da outra equipe, e cada par joga uma partida de xadrez. Suponha que Rosa e sua irmã Margarida estão nos clubes de xadrez em escolas diferentes. Qual a probabilidade de que

(a) Rosa e Margarida sejam pareadas;

(b) Rosa e Margarida sejam escolhidas para representar suas escolas mas não joguem entre si;

(c) exatamente uma das irmãs seja selecionada para representar sua escola.

9. Se André e Pedro estão entre n homens dispostos aleatoriamente em uma fila, qual é a probabilidade de que haja exatamente r homens entre eles?

10. Suponha que cada uma de um total de n varetas seja quebrada em uma parte longa e uma curta. As $2n$ partes são arrumadas ao acaso em n pares a partir dos quais novas varetas são formadas. Calcule a probabilidade de que

(a) as partes sejam unidas na ordem original;

(b) todas as partes longas sejam emparelhadas com partes curtas.

11. Um armário contém n pares diferentes de sapatos. Se $2r$ sapatos são escolhidos ao acaso (com $2r < n$), determine a probabilidade de que dentre os sapatos selecionados

(a) não exista par algum completo;

(b) exista exatamente um par completo;

(c) existam exatamente dois pares completos.

Considere $n = 10$ e $r = 2$ e calcule de duas maneiras diferentes a probabilidade de que exista pelo menos um par completo dentre os sapatos selecionados.

12. Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos em um espaço de probabilidade. Demonstre que

(a) Se $P(A_n) = 0$ para todo $n \geq 1$, então $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

(b) Se $P(A_n) = 1$ para todo $n \geq 1$, então $P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

13. Prove que se $A_1, A_2, \ldots$ e $B_1, B_2, \ldots$ são eventos do mesmo espaço de probabilidade tais que $P(A_n) \to 1$ e $P(B_n) \to p$ quando $n \to \infty$, então $P(A_n \cap B_n) \to p$ quando $n \to \infty$.

14. Uma secretária atrapalhada prepara quatro cartas com conteúdos distintos para enviar a quatro firmas distintas. Na hora de envelopá-las, bate um vento que derruba as cartas e os envelopes, e, com pressa, a secretária coloca aleatoriamente as cartas nos envelopes.

(a) Determine a probabilidade de que nenhuma carta tenha sido corretamente envelopada.

(b) Sabendo que ao menos uma carta foi colocada no envelope certo, calcule a probabilidade de que todas as cartas tenham sido corretamente envelopadas.

Solução. (a) Sejam os eventos

A: Pelo menos uma carta foi colocada no envelope certo.

A_i: A i-ésima carta foi colocada no envelope certo, $i = 1, 2, 3, 4$.

Como $A = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$, temos que, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$P(A) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Porém,

$$P(A_i) = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4},\ i = 1, 2, 3, 4,$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12},\ 1 \leq i < j \leq 4,$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24},\ 1 \leq i < j < k \leq 4 \text{ e}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Portanto,

$$P(A) = 4 \,.\, \frac{1}{4} - \binom{4}{2}\frac{1}{12} + \binom{4}{3}\frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{5}{8}.$$

Assim, a probabilidade de que nenhuma carta tenha sido corretamente envelopada é $P(A^c) = 3/8 = 0,375$.

(b) Visto que $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cap A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$, a probabilidade desejada é

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 |\, A) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)}{P(A)} = \frac{1/24}{5/8} = \frac{1}{15}.$$

15. Se quatro casais de namorados são dispostos aleatoriamente em uma fila, determine a probabilidade de que nenhum dos casais fique junto.

16. Cinco bolas são selecionadas aleatoriamente, sem reposição, de uma urna que contém 5 bolas vermelhas, 6 bolas brancas e 7 bolas azuis. Determine a probabilidade de que pelo menos uma bola de cada cor seja selecionada.

17. Um colégio tem em seu corpo docente sete professores de Biológicas, oito professores de Exatas e nove professores de Humanas. Uma comissão de sete professores será selecionada aleatoriamente. Determine a probabilidade de que nesta comissão haja pelo menos um professor de cada área.

18. No jogo de *bridge*, cada jogador recebe 13 das 52 cartas de um baralho. Calcule a probabilidade de que na mão de um jogador pelo menos um naipe esteja ausente.

19. Sabe-se que com probabilidade 1 pelo menos um dos eventos A_i, $1 \leq i \leq n$, ocorre, e que não mais que dois ocorrem simultaneamente. Se $P(A_i) = p$ e $P(A_i \cap A_j) = q$, $i \neq j$, mostre que $p \geq 1/n$ e $q \leq 2/n$.

20. Três aventureiros devem escolher um deles para uma missão arriscada. Para isso, pegam uma urna com duas bolas brancas e uma bola vermelha, e cada um retira sucessivamente uma bola, sem reposição. Aquele que pegue a bola vermelha será o escolhido para realizar a missão. Mostre que todos têm a mesma probabilidade de ser o escolhido, qualquer que seja a ordem em que realizem as extrações.

21. Um contador tem sobre a sua mesa dois grupos de 20 planilhas cada um. No primeiro grupo existem duas planilhas com erros de cálculo e no segundo há três. Um vento faz com que as planilhas caiam da mesa, e, ao arrumá-las, uma do primeiro grupo se mistura às do segundo grupo. Qual a probabilidade de que, ao revisar uma planilha do segundo grupo, o contador encontre um erro?

22. Um cliente que visita o departamento de roupas masculinas de uma loja compra um terno com probabilidade $2/5$, uma gravata com probabilidade $5/12$ e uma camisa com probabilidade $1/2$. O cliente compra um terno e uma gravata com probabilidade $2/15$, um terno e uma camisa com probabilidade $17/60$ e uma gravata e uma camisa com probabilidade $1/4$; compra os três itens com probabilidade $1/12$. Considere os eventos

A: O cliente compra um terno;

B: O cliente compra uma gravata;

C: O cliente compra uma camisa.

(a) Os eventos A, B e C são independentes?

(b) Qual a probabilidade de que o cliente não compre nenhum dos itens?

(c) Dado que o cliente não vai comprar uma gravata, qual a probabilidade de que compre um terno?

(d) Dado que o cliente vai comprar uma camisa, qual a probabilidade de que também compre uma gravata e um terno?

23. Em um curso secundário, $1/3$ dos estudantes são do sexo masculino e $2/3$ dos estudantes são do sexo feminino. A proporção de rapazes que estudam ciências é 20% e apenas 10% das moças dedicam-se às ciências. Obtenha as probabilidades de que

(a) um estudante escolhido ao acaso estude ciências;

(b) um estudante de ciências selecionado ao acaso seja do sexo feminino.

Solução. Sejam os eventos

A: O estudante é do sexo feminino.

B: O estudante estuda ciências.

(a) Pela fórmula da probabilidade total,

$$P(B) = P(B|\, A)\, P(A) + P(B|\, A^c)\, P(A^c) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

(b) Pela fórmula de Bayes,

$$P(A|\, B) = \frac{P(B|\, A)\, P(A)}{P(B)} = \frac{(1/10)(2/3)}{2/15} = \frac{1}{2}.$$

24. Uma fábrica de sorvete recebe o leite que utiliza de três fazendas: 20% da fazenda 1, 30% da fazenda 2 e 50% da fazenda 3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas e constatou que 20% do leite produzido na fazenda 1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para as fazendas 2 e 3 essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. A fábrica de sorvete recebe o leite em galões, que são armazenados em um refrigerador, sem identificação da fazenda de proveniência. Um galão é escolhido ao acaso e seu conteúdo é testado para verificar adulteração.

(a) Qual a probabilidade de que o galão contenha leite adulterado?

(b) Sabendo que o teste constatou que o leite do galão está adulterado, obtenha a probabilidade de que o galão seja proveniente da fazenda 1.

25. Considere duas moedas, uma honesta e a outra que resulta cara em cada lançamento com probabilidade $0,6$. Uma moeda é escolhida ao acaso e, após lançada quatro vezes, observa-se cara três vezes. Qual a probabilidade de que a moeda escolhida tenha sido a moeda honesta?

26. Jogamos um dado honesto e em seguida lançamos tantas moedas honestas como os pontos indicados no dado.

(a) Qual a probabilidade de obter quatro caras?

(b) Dado que foram obtidas quatro caras, qual a probabilidade de que o dado tenha mostrado seis pontos?

27. A caixa I contém 4 bolas brancas e 2 pretas, a caixa II contém 3 bolas brancas e 1 preta e a caixa III contém 1 bola branca e 2 pretas.

(a) Extrai-se uma bola de cada caixa. Determine a probabilidade de que todas as bolas sejam brancas.

(b) Seleciona-se uma caixa e dela extrai-se uma bola. Determine a probabilidade de que a bola extraída seja branca.

(c) Calcule em (b) a probabilidade de que a primeira caixa tenha sido escolhida, dado que a bola extraída é branca.

28. Em um restaurante, três cozinheiros A, B e C preparam um tipo especial de bolo, e com probabilidades respectivas 0,02, 0,03 e 0,05 a massa do bolo não cresce. Sabe-se que A prepara 50 por cento desses bolos, B 30 por cento e C 20 por cento. Se uma massa de bolo não cresceu, qual a probabilidade de que tenha sido preparada pelo cozinheiro A?

29. Uma senhora da alta sociedade dá uma festa em sua mansão. Ao término da festa, ela descobre que sua coleção de jóias foi roubada. Após as investigações, a polícia tem certeza de que o ladrão foi precisamente uma das 76 pessoas presentes à festa (entre convidados e garçons). Ademais, os investigadores encontram na cena do crime o perfil de DNA do ladrão, e sabe-se que este perfil de DNA ocorre em 2% de toda população. Dado que o DNA do Sr. João, o primeiro suspeito cujo DNA é analisado, combina com o perfil achado na cena do crime, qual é a probabilidade de que ele tenha roubado as jóias?

30. Um experimento consiste em lançar duas vezes uma moeda honesta. Considere os eventos

A: O primeiro lançamento resulta em cara.

B: O segundo lançamento resulta em cara.

C: O resultado do primeiro lançamento coincide com o resultado do segundo lançamento.

Prove que A, B e C são independentes dois a dois, porém não são independentes.

31. Um par de dados honestos é lançado repetidamente. Supondo que os ensaios são independentes, qual a probabilidade de que um total 8 apareça antes de um total 7?

Sugestão: Defina A_n o evento de que os totais 7 e 8 não ocorrem nos primeiros $n-1$ ensaios e ocorre um total 8 no n-ésimo ensaio.

32. Existem duas estradas de A a B e duas estradas de B a C. Cada uma das quatro estradas é bloqueada por queda de barreira com probabilidade $p = 1/10$, independentemente das demais. Determine a probabilidade de que exista uma estrada aberta de A a B dado que não existe um caminho aberto de A a C.
Se, além disso, existe uma estrada direta de A a C, esta estrada sendo bloqueada com probabilidade $p = 1/10$ independentemente das demais, encontre a probabilidade condicional pedida.

33. Duas pessoas lançam uma moeda honesta n vezes, de forma independente. Mostre que a probabilidade delas obterem igual número de caras é a mesma que a de obterem ao todo n caras.

34. Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos independentes. Demonstre que

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P(A_k)) \geq 1 - \exp\Big\{ -\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big\}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty \quad \Longrightarrow \quad P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = 1.$$

Sugestão: Para mostrar a desigualdade, use que $1-x \leq e^{-x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para provar a implicação, note que $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \uparrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ quando $n \to \infty$.

35. (a) Sejam A e B dois eventos com probabilidade positiva. Se a ocorrência de B faz de A um evento mais provável, então a ocorrência de A faz de B um evento mais provável?

(b) Mostre que se A é um evento tal que $P(A)$ é igual a 0 ou 1, então A é independente de todo evento B.

36. Suponha que $\Omega = \{1, \ldots, p\}$, onde p é um número primo. Seja $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e, para $A \in \mathcal{F}$, defina $P(A) = |A|/p$. Mostre que se A e B são independentes, então ao menos um dos dois eventos é $\varnothing$ ou Ω.

Sugestão: Prove que p é um divisor de $|A|\,|B|$.

37. Seja P uma probabilidade sobre um espaço amostral Ω e suponha que A é um evento com $0 < P(A) < 1$. Mostre que A e B são independentes se e somente se $P(B\,|A) = P(B\,|A^c)$.

Sugestão: Use que $P(A^c \cap B) + P(A \cap B) = P(B)$.

38. Seja P uma probabilidade sobre um espaço amostral Ω.

(a) Mostre que se A e B são eventos tais que $P(A) < 1$, $P(B) > 0$ e $P(A\,|B) = 1$, então $P(B^c\,|A^c) = 1$.

(b) Prove que se E, F e G são eventos tais que $P(F \cap G) > 0$ e $P(F \cap G^c) > 0$, então

$$P(E\,|F) = P(E\,|F \cap G)P(G\,|F) + P(E\,|F \cap G^c)P(G^c\,|F).$$

Respostas

1. (a) $A \cap B^c \cap C^c$ (b) $A \cap B \cap C^c$ (c) $A \cap B \cap C$ (d) $A \cup B \cup C$

(e) $A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$

(f) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

(g) $(A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

(h) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) =$ Complementar de (g)

3. $4/9$, muda o raciocínio mas não o resultado.

4. $325/833$

5. $\approx 5,4\,.\,10^{-5}$ e $\approx 1,4\,.\,10^{-3}$

6. (a) $0,310$ (b) $0,952$ (c) $0,999$

7. (a) $0,236$ (b) $0,121$

8. (a) $1/18$ (b) $1/6$ (c) $1/2$

9. $2(n-r-1)/\,(n(n-1))$

10. (a) $2^n n!/(2n)!$ (b) $2^n/\binom{2n}{n}$

11. (a) $\binom{n}{2r}\,2^{2r}/\binom{2n}{2r}$ (b) $n\,\binom{n-1}{2r-2}\,2^{2r-2}/\binom{2n}{2r}$ (c) $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2r-4}\,2^{2r-4}/\binom{2n}{2r}$

$99/323$ (Complementar do evento em (a) e Princípio da Inclusão-Exclusão).

15. $12/35$

16. $6055/8568$

17. $903/1012$

18. $0,051$

20. Defina V_i o evento de selecionar a bola vermelha na i-ésima extração e mostre que $P(V_i) = 1/3$ para $i = 1, 2, 3$.

21. 31/210

22. (a) Não (b) 4/15 (c) 16/35 (d) 1/6

24. (a) 13/200 (b) 8/13

25. 0,42

26. (a) 29/384 (b) 15/29

27. (a) 1/6 (b) 7/12 (c) 8/21

28. 0,345

29. 2/5

31. 5/11

32. 99/199 em ambos os casos.

35. (a) Sim. Quando afirmamos que a ocorrência de B faz de A um evento mais provável, queremos dizer que $P(A \mid B) > P(A)$.

(b) Considere separadamente os casos $P(A) = 0$ e $P(A) = 1$. No segundo, use que $P(A \cap B) = P(B) - P(A^c \cap B)$.

Capítulo 3

Variáveis aleatórias

1. Definições

1.1. Uma *variável aleatória* X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é uma função a valores reais definida em Ω, tal que

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
As variáveis aleatórias que assumem valores em um conjunto finito ou infinito enumerável são chamadas *discretas* e aquelas que assumem valores em um intervalo da reta real são chamadas *contínuas*.

1.2. A *função de distribuição acumulada* de uma variável aleatória X é a função $F = F_X$ definida por

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}),\ x \in \mathbb{R}.$$

Propriedades fundamentais de uma função de distribuição:

(F1) F é uma função não-decrescente: se $a < b$, então $F(a) \leq F(b)$.

(F2) F é contínua à direita: se $x_n \downarrow x$, então $F(x_n) \downarrow F(x)$.

(F3) Se $x_n \downarrow -\infty$, então $F(x_n) \downarrow 0$; se $x_n \uparrow +\infty$, então $F(x_n) \uparrow 1$.

Outras propriedades:

(i) Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

(ii) F tem um número finito ou enumerável de pontos de descontinuidade. Ademais, para $x \in \mathbb{R}$,

$$P(X = x) = F(x) - F(x^-) = \text{Salto de } F \text{ no ponto } x.$$

Observação. Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz (F1), (F2) e (F3) é a função de distribuição de alguma variável aleatória X.

1.3. (a) A variável aleatória X é *discreta* se assume um número finito ou enumerável de valores, isto é, se existe um conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\forall\, \omega \in \Omega$. A função $p(x) = P(X = x)$ é chamada *função de probabilidade* de X.
(b) A variável aleatória X é *(absolutamente) contínua* se existe uma função $f(x) \geq 0$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, dizemos que f é uma *função densidade de probabilidade* de X.

Observação. Uma variável aleatória discreta é definida quando definimos os seus valores possíveis $\{x_i\}_{i\geq 1}$ e as respectivas probabilidades $\{p_i\}_{i\geq 1}$ satisfazendo

$$p_i > 0,\ \forall\, i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Uma variável aleatória contínua é definida quando definimos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq 0,\ \forall\, x \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

1.4. A *função indicadora* de um evento A é a variável aleatória discreta que assume os valores 1 ou 0 conforme A ocorra ou não, ou seja,

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A, \\ 0 & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

1.5. Para $B \subset \mathbb{R}$,

$$P(X \in B) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i:\, x_i \in B} p(x_i) & \text{se } X \text{ é discreta,} \\ \displaystyle\int_B f(x)\, dx & \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f, \end{cases}$$

onde no segundo caso supomos que B é um subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a integral faz sentido.

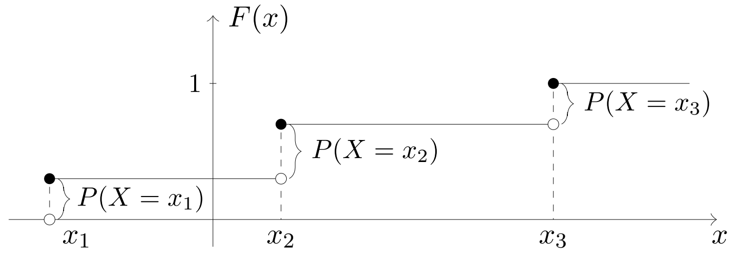


Figura 3.1: Função de distribuição de uma variável aleatória discreta.

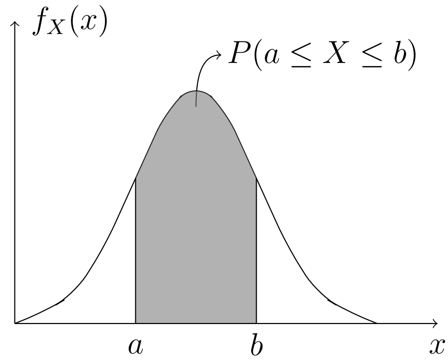


Figura 3.2: Densidade de uma variável aleatória contínua.

2. Modelos de distribuições discretas

Como é usual quando se trata de variáveis aleatórias, lê-se o símbolo $\sim$ como "tem distribuição".

1. $X \sim$ Uniforme discreta sobre o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ se tem função de probabilidade dada por
$$P(X = x_i) = \frac{1}{n},\ i = 1, \ldots, n.$$
X representa a escolha ao acaso de um elemento do conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$. O caso particular em que $x_1 = 1, \ldots, x_n = n$ é denotado por $X \sim$ Uniforme Discreta(n).

2. $X \sim$ Bernoulli(p), $0 \leq p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por
$$P(X = x) = p^x\,(1-p)^{1-x},\ x = 0, 1.$$
X é a função indicadora da ocorrência de sucesso em um ensaio de Bernoulli (experimento que tem somente dois resultados possíveis: sucesso e fracasso, com probabilidades respectivas p e $(1-p)$).

3. $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, $n \geq 1$ inteiro e $0 \leq p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x = 0, 1, \ldots, n.$$
X é o número de sucessos obtidos em n ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p em cada ensaio.

   É importante observar que uma variável aleatória com distribuição Binomial(n, p) pode ser escrita como a soma de n variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli(p).

   Propriedade: Se $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, onde $0 < p < 1$, então, à medida que k vai de 0 a n, $P(X = k)$ primeiro cresce monotonamente e depois decresce monotonamente, atingindo seu valor máximo quando k é o maior inteiro menor ou igual a $(n+1)\,p$.

4. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$, se tem função de probabilidade dada por
$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!},\ x = 0, 1, \ldots$$

5. $X \sim \text{Geométrica}(p)$, $0 < p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por
$$P(X = x) = p\,(1-p)^{x-1},\ x = 1, 2, \ldots$$
X é o número de ensaios necessários para obter o primeiro sucesso quando se realiza uma seqüência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p em cada ensaio.

   Propriedade fundamental: Falta de memória.
$$P(X \geq m + n \,|\, X \geq m) = P(X \geq n) \text{ para } m, n = 1, 2, \ldots$$

6. $X \sim \text{Binomial Negativa}(r, p)$, $r \geq 1$ inteiro e $0 < p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por
$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r},\ x = r, r+1, \ldots$$
X é o número de ensaios necessários para obter o r-ésimo sucesso quando se realiza uma seqüência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p em cada ensaio.

Cumpre enfatizar que uma variável aleatória com distribuição Binomial Negativa(r, p) pode ser escrita como a soma de r variáveis aleatórias independentes com distribuição Geométrica(p).

7. $X \sim$ Hipergeométrica(n, R, N), n, R, N inteiros, $n \leq N$, $R \leq N$, se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = \binom{N-R}{n-x}\binom{R}{x}\binom{N}{n}^{-1},$$

para x inteiro tal que $\text{máx}(0, n - N + R) \leq x \leq \text{mín}(n, R)$. X é o número de bolas vermelhas em uma amostra de tamanho n, extraída sem reposição de uma urna com N bolas, das quais R são vermelhas e $N - R$ azuis.

3. Modelos de distribuições contínuas

1. $X \sim$ Uniforme (a, b), $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \; a < x < b.$$

X representa um ponto escolhido ao acaso no intervalo (a, b).

2. $X \sim$ Normal(μ, σ^2), $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Essa distribuição também é chamada distribuição de Laplace-Gauss.

A distribuição normal de parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ é conhecida como normal padrão. Sua importância deriva do fato de que se pode obter uma variável aleatória normal padrão a partir de uma normal qualquer. De fato, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

A função distribuição da normal padrão, denotada por $\Phi(\cdot)$, é tabelada e satisfaz $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$ para todo z. A partir dela, podem-se obter probabilidades para uma variável aleatória normal padrão qualquer.

3. $X \sim$ Exponencial(λ), $\lambda > 0$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

Propriedade fundamental: Falta de memória.

$$P(X \geq s + t \,|\, X \geq s) = P(X \geq t) \text{ para } s, t \in \mathbb{R} \text{ com } s \geq 0 \text{ e } t \geq 0.$$

4. $X \sim$ Gama(α, λ), $\alpha > 0, \lambda > 0$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda\, x},\ x \geq 0.$$

Observação. A função gama de Euler $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx,\ \alpha > 0,$$

e possui as seguintes propriedades:

(i) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\, \Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

(ii) $\Gamma(n + 1) = n!$ para $n \geq 0$ inteiro.

Freqüentemente, é útil saber que

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda\, x}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} \ \text{ se } \alpha > 0 \text{ e } \lambda > 0.$$

5. $X \sim$ Beta(a, b), $a > 0, b > 0$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a, b)}\, x^{a-1}\, (1 - x)^{b-1},\ 0 \leq x \leq 1.$$

Observação. A função beta de Euler $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é definida por

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}\, (1 - x)^{b-1}\, dx,\ a > 0, b > 0,$$

e satisfaz $B(a, b) = \Gamma(a)\, \Gamma(b) / \Gamma(a + b)$.

6. $X \sim$ Cauchy(a, b), $a \in \mathbb{R}, b > 0$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\, b \left\{1 + [(x - a)/b]^2\right\}},\ x \in \mathbb{R}.$$

A distribuição de Cauchy com parâmetros $a = 0$ e $b = 1$ é denominada Cauchy padrão.

4. Aproximação de Poisson à Binomial

Seja $X \sim$ Binomial(n, p), e consideremos $Y \sim$ Poisson(λ), com $\lambda = n\,p$. Se n é grande e p é pequeno de modo que o valor de λ é moderado, podemos aproximar a função de probabilidade de X pela função de probabilidade de Y, isto é, para qualquer inteiro k entre 0 e n,

$$P(X = k) \approx P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}.$$

Essa aproximação é justificada pelo Teorema de Poisson (veja-se **2.8** do Capítulo 5, p. 88). Em palavras, se são realizados n ensaios de Bernoulli independentes, cada um resultando em sucesso com probabilidade p, então, quando n é grande e p pequeno o suficiente a fazer $n\,p$ moderado, o número de sucessos que ocorrem tem aproximadamente distribuição de Poisson com parâmetro $n\,p$. De acordo com duas regras práticas, a aproximação é considerada boa se $n \geq 20$ e $p \leq 0,05$ ou se $n \geq 100$ e $n\,p \leq 10$.

5. Aproximação Normal à Binomial

Se n é grande, então uma variável aleatória X com distribuição Binomial(n, p) tem aproximadamente a mesma distribuição de uma variável aleatória normal com parâmetros $\mu = n\,p$ e $\sigma^2 = n\,p\,(1 - p)$. Essa afirmação é justificada pelo Teorema Central do Limite de De Moivre e Laplace (**2.7** do Capítulo 5, p. 88), o qual estabelece que, quando $n \to \infty$, a função de distribuição da variável

$$\frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}$$

converge em todo ponto para a função de distribuição Φ da normal padrão.

Assim, para qualquer inteiro i entre 0 and n,

$$P(X \leq i) = P\left(\frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} \leq \frac{i - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{i - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right).$$

Visto que estamos aproximando uma variável aleatória discreta por uma variável contínua, podemos fazer o seguinte ajuste:

$$P(X \leq i) = P(X \leq i + 0,5) \approx \Phi\left(\frac{i + 0,5 - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right),$$

e, para $i \leq j$ inteiros entre 0 and n,

$$P(i \leq X \leq j) \approx \Phi\left(\frac{j+0,5-n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{i-0,5-n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right).$$

Esse procedimento de subtrair e somar $0,5$ é conhecido como *correção de continuidade de Fisher* e fornece uma aproximação ligeiramente mais precisa, sendo especialmente recomendável quando n não for muito grande.
Dois critérios freqüentemente usados são que $n\,p \geq 5$ e $n\,(1-p) \geq 5$ ou $n\,p\,(1-p) \geq 10$ implicam uma boa aproximação.

6. Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas

6.1. Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. A *função de distribuição acumulada conjunta* do par $(X,\ Y)$ é definida por

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y),\ x,y \in \mathbb{R}.$$

As *funções de distribuição marginais* de X e Y são respectivamente dadas por

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y),\ y \in \mathbb{R}.$$

6.2. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço de probabilidade. A *função de probabilidade conjunta* de X e Y é

$$p(x,y) = P(X = x, Y = y),\ x,y \in \mathbb{R}.$$

Note que $p(x,y) > 0$ apenas para (x,y) em um subconjunto finito ou enumerável de $\mathbb{R}^2$.
As *funções de probabilidade marginais* de X e Y são

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p_Y(y) = \sum_x p(x,y),\ y \in \mathbb{R}.$$

6.3. Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. Dizemos que X e Y são *conjuntamente contínuas* se existe uma função $f(x,y) \geq 0$, chamada uma *função densidade de probabilidade conjunta*, tal que para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv.$$

Se X e Y são conjuntamente contínuas com função densidade conjunta $f(x, y)$, então são individualmente contínuas com *funções densidade marginais* respectivas

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy,\ x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx,\ y \in \mathbb{R}.$$

Observação. É natural a extensão das definições e resultados anteriores para o caso de mais de duas variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade.

7. Independência de variáveis aleatórias

7.1. As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são *independentes* se para quaisquer conjuntos $A_i \subset \mathbb{R}$ (borelianos), $i = 1, \ldots, n$,

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$$

7.2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias com função de distribuição conjunta $F(x_1, \ldots, x_n)$ e funções de distribuição marginais $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$, respectivamente. Então, $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se e somente se

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \ldots F_{X_n}(x_n)$$

para qualquer escolha de $x_1, \ldots, x_n$. (Em palavras, a função de distribuição conjunta se fatora como o produto das funções de distribuição individuais).

7.3. Critério para independência no caso discreto:

As variáveis aleatórias discretas $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se e somente se

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n)$$

para qualquer escolha de $x_1, \ldots, x_n$.

7.4. Critério para independência no caso contínuo:

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias conjuntamente contínuas com função densidade conjunta $f(x_1, \ldots, x_n)$ e funções densidade marginais $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$, respectivamente. Então, $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se e somente se

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

para qualquer escolha de $x_1, \ldots, x_n$.

7.5. Uma coleção infinita de variáveis aleatórias é *independente* se toda subcoleção finita dessas variáveis aleatórias é independente.

7.6. Se $X_1, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então funções contínuas de famílias disjuntas das X_i's são independentes.

7.7. Quando falamos de variáveis aleatórias, a abreviatura i.i.d. significa independentes e identicamente distribuídas.

8. Funções de variáveis aleatórias

8.1. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f. Suponhamos que ϕ é uma função estritamente monótona, diferenciável na imagem de X, e seja ϕ^{-1} a inversa de ϕ. Então, a variável aleatória definida por $Y = \phi(X)$ tem uma função densidade de probabilidade g dada por

$$g(y) = \begin{cases} f(\phi^{-1}(y)) \left| \dfrac{d}{dy}\, \phi^{-1}(y) \right| & \text{se } y = \phi(x) \text{ para algum } x, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação. No caso de ϕ não ser monótona, a regra geral é expressar F_Y em termos de F_X.

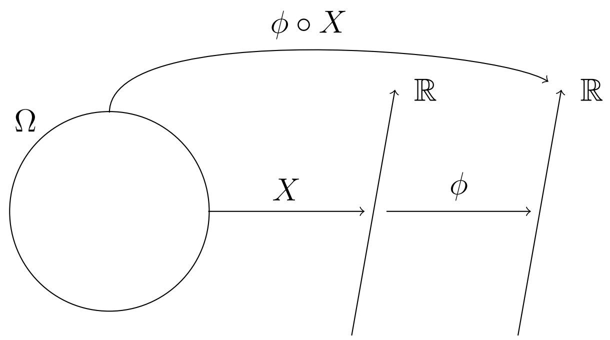


Figura 3.3: Função de uma variável aleatória.

8.2. Método do Jacobiano: Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias conjuntamente contínuas com função densidade conjunta f e suponhamos que $f(x_1, x_2) > 0$ para $(x_1, x_2) \in A$, com A um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.

Definimos novas variáveis aleatórias Y_1 e Y_2, obtidas a partir das primeiras pela transformação

$$y_1 = \phi_1(x_1, x_2), \quad y_2 = \phi_2(x_1, x_2). \tag{$*$}$$

Suponhamos que:

1. As funções $(*)$ são contínuas e têm derivadas parciais $\partial y_i/\partial x_j$, $i, j = 1, 2$, contínuas em todos os pontos $(x_1, x_2) \in A$.

2. As funções $(*)$ definem uma bijeção de A em $A^\star$, onde $A^\star$ é a imagem da transformação.

3. A transformação inversa

$$x_1 = \psi_1(y_1, y_2), \quad x_2 = \psi_2(y_1, y_2), \tag{$**$}$$

que existe e é única, tem Jacobiano não-nulo em $A^\star$

$$J(y_1, y_2) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \det \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial y_1 & \partial x_1/\partial y_2 \\ \partial x_2/\partial y_1 & \partial x_2/\partial y_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então, Y_1 e Y_2 são conjuntamente contínuas com função densidade conjunta dada por

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2)\,|J(y_1, y_2)| & \text{se } (y_1, y_2) \in A^\star, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde x_1 e x_2 são dados por $(**)$.

Observação. Como freqüentemente é mais fácil obter $J(x_1, x_2) = \partial(y_1, y_2)/\partial(x_1, x_2)$, é importante recordar a seguinte relação:

$$J(y_1, y_2) = J(x_1, x_2)^{-1},$$

onde x_1 e x_2 são dados por $(**)$.

8.3. (a) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes, a valores inteiros, com funções de probabilidade p_X e p_Y, respectivamente. A *convolução* de p_X e p_Y é a função de probabilidade $p = p_X * p_Y$ definida por

$$p(z) = \sum_x p_X(x)\, p_Y(z - x),$$

para $z \in \{\dots,-1,0,1,\dots\}$. A função $p(z)$ é a função de probabilidade da variável aleatória $Z = X + Y$.

(b) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas e independentes, com funções densidade respectivas f_X e f_Y. A *convolução* de f_X e f_Y é a função $f = f_X * f_Y$ definida por

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx,\ z \in \mathbb{R}.$$

Então, $Z = X + Y$ tem função densidade f.

8.4. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas e independentes, com funções densidade respectivas f_X e f_Y. Então,

(i) $X - Y$ tem função densidade dada por

$$f_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(x-z)\, dx,\ z \in \mathbb{R}.$$

(ii) XY tem função densidade dada por

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|}\, f_X(x)\, f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx,\ z \in \mathbb{R}.$$

(iii) Y/X tem função densidade dada por

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f_X(x)\, f_Y(xz)\, dx,\ z \in \mathbb{R}.$$

9. Estatísticas de ordem

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d., contínuas com função densidade comum f e função de distribuição F. Defina Y_i a i-ésima menor de $X_1, X_2, \dots, X_n$. As variáveis aleatórias $Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots \leq Y_n$ são denominadas as *estatísticas de ordem* associadas a $X_1, X_2, \dots, X_n$.

A densidade conjunta de $Y_1, \dots, Y_n$ é dada por

$$f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n) = n!\, f(y_1)\dots f(y_n), \quad y_1 < y_2 < \cdots < y_n.$$

Para $i < j$, a densidade conjunta de Y_i e Y_j é dada por

$$f_{Y_i,Y_j}(x,y) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!}\, [F(x)]^{i-1}\, [F(y)-F(x)]^{j-i-1}\, [1-F(y)]^{n-j}\, f(x)\, f(y)$$

para $x < y$.

A densidade de Y_i é dada por

$$f_{Y_i}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\,[F(x)]^{i-1}\,[1-F(x)]^{n-i}\,f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, as densidades de $Y_1 = \text{mín}\{X_1, \dots, X_n\}$ e $Y_n = \text{máx}\{X_1, \dots, X_n\}$ são, respectivamente,

$$f_{Y_1}(x) = n\,f(x)\,[1-F(x)]^{n-1},\ x \in \mathbb{R} \quad \text{e}$$
$$f_{Y_n}(x) = n\,f(x)\,[F(x)]^{n-1},\ x \in \mathbb{R}.$$

10. Modelos multidimensionais

1. **Distribuição multinomial:** Seja Ω o espaço amostral associado a um experimento aleatório, e suponhamos que $\{A_1, \dots, A_n\}$ é uma partição de Ω em n eventos. Obviamente, se $p_i = P(A_i)$, então $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

   Realizam-se m repetições independentes desse experimento. Seja X_i o número de vezes que ocorre o evento A_i nas m repetições. A variável n-dimensional $(X_1, \dots, X_n)$ tem distribuição multinomial de parâmetros $m, p_1, \dots, p_n$. A função de probabilidade conjunta é dada por

   $$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{m!}{x_1!\ \dots\ x_n!}\,p_1^{x_1}\ \dots\ p_n^{x_n},$$

   para $x_i \in \{0, 1, \dots, m\}$ com $x_1 + \dots + x_n = m$.

   Note que $X_i \sim \text{Binomial}(m, p_i)$ para $i = 1, \dots, n$.

2. **Distribuição hipergeométrica multivariada:** Uma urna contém N bolas, das quais N_1 são da cor 1, N_2 da cor 2, ..., N_r da cor r ($N = N_1 + \dots + N_r$). Retiram-se n bolas sem reposição ($n \leq N$), e seja X_i o número de bolas da cor i extraídas. A variável r-dimensional $(X_1, \dots, X_r)$ tem distribuição hipergeométrica multivariada de parâmetros $n, N_1, \dots, N_r, N$. A função de probabilidade conjunta é dada por

   $$P(X_1 = x_1, \dots, X_r = x_r) = \binom{N_1}{x_1} \cdots \binom{N_r}{x_r} \binom{N}{n}^{-1},$$

   para $x_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ com $x_1 + \dots + x_r = n$.

   Observe que $X_i \sim \text{Hipergeométrica}(n, N_i, N)$ para $i = 1, \dots, r$.

3. **Distribuição uniforme:** Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto tal que $\mathrm{Vol}\,(G) > 0$, onde $\mathrm{Vol}\,(G)$ é o volume n-dimensional de G, definido por

$$\mathrm{Vol}\,(G) = \int \underset{G}{\cdots} \int dx_1 \ldots dx_n.$$

A variável n-dimensional $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ tem distribuição uniforme em G se tem densidade

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1\,/\,\mathrm{Vol}\,(G) & \text{se } (x_1, \ldots, x_n) \in G, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, para $B \subset \mathbb{R}^n$,

$$P(\underset{\sim}{X} \in B) = \frac{\mathrm{Vol}\,(B \cap G)}{\mathrm{Vol}\,(G)}.$$

Esse modelo corresponde à escolha ao acaso de um ponto em G.

11. Distribuições relacionadas com a normal

11.1. As distribuições definidas a seguir são fundamentais no estudo de procedimentos de estimação estatística.

1. Se $Z_1, \ldots, Z_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição $N(0,1)$, então a variável $X = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ tem *distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade*, denotada χ_n^2.

   A distribuição χ_n^2 é a Gama$(n/2, 1/2)$.

2. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi_n^2$, então a variável

   $$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

   tem *distribuição t de Student com n graus de liberdade*, denotada t_n. A densidade dessa variável é dada por

   $$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\,\frac{1}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}},\ t \in \mathbb{R}.$$

   A distribuição t_1 é a Cauchy padrão.

3. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, $X \sim \chi^2_m$ e $Y \sim \chi^2_n$, então a variável

$$U = \frac{X/m}{Y/n}$$

tem *distribuição F de Snedecor com m e n graus de liberdade*, denotada $F(m,n)$. A densidade dessa variável é dada por

$$f_U(u) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, m^{m/2}\, n^{n/2}\, u^{m/2-1}\,(n+m\,u)^{-(m+n)/2}\,,\ u>0.$$

Se $X \sim F(m,n)$, então $1/X \sim F(n,m)$.

11.2. Sejam $X_1,\ldots,X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição $N(\mu,\sigma^2)$. Definimos

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \text{Média amostral} \quad \text{e}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\,\bar{X}^2}{n-1} = \text{Variância amostral.}$$

Então, $\bar{X}$ e S^2 são variáveis aleatórias independentes, com $\bar{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$ e $(n-1)\,S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$. Daí, segue que

$$\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}.$$

Exercícios

1. Quinze pessoas portadoras de determinada doença são selecionadas para se submeter a um tratamento. Sabe-se que este tratamento é eficaz na cura da doença em 80% dos casos. Suponha que os indivíduos submetidos ao tratamento curam-se (ou não) independentemente uns dos outros e considere X o número de curados dentre os 15 pacientes submetidos ao tratamento.

(a) Qual a distribuição de X?

(b) Qual a probabilidade de que os 15 pacientes sejam curados?

(c) Qual a probabilidade de que pelo menos dois não sejam curados?

2. Um estudante preenche por adivinhação um exame de múltipla escolha com 5 respostas possíveis (das quais uma correta) para cada uma de 10 questões.

(a) Qual a distribuição do número de respostas certas?

(b) Qual a probabilidade de que o estudante obtenha 9 ou mais respostas certas?

(c) Qual a probabilidade de que acerte pelo menos duas questões?

3. O número de erros tipográficos numa página de determinado livro é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro $1/2$. Encontre a probabilidade de que haja três ou mais erros tipográficos nesta página. Calcule esta probabilidade dado que há pelo menos um erro nesta página.

4. A liga de futebol de um país tem quatro times: time 1, time 2, time 3 e time 4. Um time estrangeiro em excursão pelo país vai jogar um amistoso contra cada um dos times 1, 2 e 3. Suponha que contra o time 1 este time tem probabilidade $1/4$ de conquistar a vitória, enquanto que essa probabilidade vale $1/2$ quando o adversário é o time 2 e vale $2/5$ quando o adversário é o time 3. Assuma também que os resultados dos três amistosos são independentes. Seja X o número de vitórias conquistadas pelo time estrangeiro nos três amistosos.

(a) Obtenha a função de probabilidade de X.

(b) Qual a probabilidade de que o time estrangeiro obtenha pelo menos uma vitória?

Suponha agora que, dependendo do seu desempenho nos três amistosos, o time estrangeiro decidirá fazer um quarto jogo, contra o time 4. Caso conquiste três vitórias nos três amistosos, jogará contra o time 4; caso obtenha exatamente duas vitórias, fará o quarto jogo com probabilidade $4/5$ e não realizará o quarto jogo caso obtenha apenas uma vitória ou não vença nenhum dos três amistosos.

(c) Determine a probabilidade de que o quarto jogo seja realizado.

(d) Dado que o quarto jogo se realizou, qual a probabilidade de que o time estrangeiro tenha vencido os três amistosos iniciais?

Solução. (a) Notamos que X assume os valores 0, 1, 2, 3 e consideramos os eventos

$$V_i : \text{O time estrangeiro conquista a vitória contra o time } i,\ i = 1, 2, 3.$$

Sabemos que V_1, V_2 e V_3 são independentes, com $P(V_1) = 1/4$, $P(V_2) = 1/2$ e $P(V_3) = 2/5$. Então,

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= P({V_1}^c \cap {V_2}^c \cap {V_3}^c) = P({V_1}^c)\, P({V_2}^c)\, P({V_3}^c) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{5} = \frac{9}{40}, \\
P(X = 1) &= P(V_1 \cap {V_2}^c \cap {V_3}^c) + P({V_1}^c \cap V_2 \cap {V_3}^c) + P({V_1}^c \cap {V_2}^c \cap V_3) \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{5} = \frac{9}{20}, \\
P(X = 2) &= P(V_1 \cap V_2 \cap {V_3}^c) + P(V_1 \cap {V_2}^c \cap V_3) + P({V_1}^c \cap V_2 \cap V_3) \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{5} = \frac{11}{40}, \\
P(X = 3) &= P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{5} = \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

(b) A probabilidade de que o time estrangeiro obtenha pelo menos uma vitória é

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{31}{40}.$$

(c) Denotando por F o evento de que o time estrangeiro faz o quarto jogo, temos

$$P(F \,|\, X = 3) = 1, \quad P(F \,|\, X = 2) = 4/5, \quad P(F \,|\, X = 1) = P(F \,|\, X = 0) = 0,$$

portanto, pela fórmula da probabilidade total,

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \,|\, X = 3)\, P(X = 3) + P(F \,|\, X = 2)\, P(X = 2) + \\ &\qquad + P(F \,|\, X = 1)\, P(X = 1) + P(F \,|\, X = 0)\, P(X = 0) \\ &= 1\, \frac{1}{20} + \frac{4}{5}\, \frac{11}{40} = 0,27. \end{aligned}$$

(d) Pela fórmula de Bayes,

$$P(X = 3 \,|\, F) = \frac{P(F \,|\, X = 3)\, P(X = 3)}{P(F)} = \frac{1/20}{27/100} = \frac{5}{27} \approx 0,185.$$

5. Um revendedor de componentes elétricos os compra em lotes de 10 peças. Seu controle de qualidade consiste em inspecionar 3 componentes selecionados aleatoriamente de um lote e aceitar o lote somente se os 3 componentes não são defeituosos. Sabe-se que 30% dos lotes têm 4 componentes defeituosos e 70% têm apenas 1 componente defeituoso. Dos 3 componentes selecionados de um lote, seja X o número de componentes defeituosos.

(a) Obtenha a função de probabilidade de X.

(b) Qual a probabilidade de que um lote seja aceito?

6. Um número aleatório N de dados são lançados. Suponha que

$$P(N = i) = \frac{1}{2^i},\ i = 1, 2, \ldots$$

A soma dos resultados é S. Encontre as probabilidades de que

(a) $N = 2$ dado que $S = 3$;

(b) $S = 3$ dado que N é par.

7. Seja X uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} a\,(1 + x) & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 2/3 & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtenha:

(a) o valor de a. (b) $P(0,5 < X \leq 1,5)$.

8. Se Y tem distribuição uniforme em $(0,5)$, qual é a probabilidade de que as raízes da equação $4\,x^2 + 4\,x\,Y + Y + 2 = 0$ sejam ambas reais?

9. Defina uma coleção de eventos E_a, $0 < a < 1$, satisfazendo a propriedade de que $P(E_a) = 1$ para todo a, mas $P\left(\cap_a E_a\right) = 0$.

Sugestão: Seja X com distribuição uniforme em $(0,1)$ e defina cada E_a em termos de X.

10. O tempo de duração em horas de um componente eletrônico tem distribuição exponencial de parâmetro $1/8$. O departamento de controle de qualidade da fábrica que o produz descarta todos os componentes que falham nas três primeiras horas, e os restantes são comercializados.

(a) Determine a densidade da duração em horas de um componente comercializado.

(b) Qual a probabilidade de um componente comercializado durar mais que 12 horas?

11. Uma fábrica utiliza dois métodos para a produção de lâmpadas: 70% delas são produzidas pelo método A e o resto pelo método B. A duração em horas das lâmpadas tem distribuição exponencial com parâmetro $1/80$ ou $1/100$, conforme se utilize o método A ou o B. Em um grupo de 10 lâmpadas selecionadas ao acaso, qual a probabildade de que 6 delas durem pelo menos 90 horas?

12. Aproximadamente 80000 casamentos foram celebrados no Rio de Janeiro durante o ano passado. Estime a probabilidade de que para pelo menos um desses casais ambos os cônjuges tenham nascido no dia 30 de abril. Deixe claras as suas hipóteses.

13. Doze por cento da população é canhota. Aproxime a probabilidade de que haja pelo menos 20 canhotos em uma escola com 200 alunos. Esclareça as suas hipóteses.

14. O tempo de vida em horas de chips de computador produzidos por uma indústria tem distribuição normal com parâmetros $\mu = 1{,}4\,.\,10^6$ e $\sigma^2 = 9\,.\,10^{10}$. Obtenha uma estimativa para a probabilidade de que um lote de 100 chips contenha pelo menos 20 chips que durem menos que $1{,}8\,.\,10^6$ horas.

15. Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas azuis. Realizam-se três extrações, sem reposição. Sejam X o número de bolas brancas obtidas e Y o número de bolas azuis extraídas antes de obter a primeira bola branca. Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y, bem como as marginais.

16. A diretoria de uma organização feminina é formada por quatro mulheres solteiras, três divorciadas, duas viúvas e uma casada. Uma comissão de três pessoas é escolhida ao acaso para elaborar folhetos de propaganda da organização. Sejam X e Y o número de mulheres solteiras e viúvas na comissão, respectivamente.

(a) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y, bem como as marginais.

(b) Calcule a probabilidade de que pelo menos uma viúva integre a comissão.

(c) Qual a probabilidade de que haja na comissão mais solteiras que viúvas?

17. Modelo de Maxwell-Boltzmann. Distribuímos k bolas *distinguíveis* em n urnas, de forma que todas as configurações são igualmente prováveis. Permitimos que mais de uma bola seja colocada numa mesma urna. Seja X_j o número de bolas na urna j.

Demonstre que

(a) $P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \dfrac{k!}{k_1! \dots k_n!}\, n^{-k}$ para $k_j \geq 0$ com $\sum_{j=1}^n k_j = k$.

(b) $P(X_1 = i) = \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{1}{n}\right)^i \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-i}$, $i = 0, \dots, k$.

(c) $\displaystyle\lim_{n,k\to\infty,\, k/n\to\lambda\in(0,\infty)} P(X_1 = i) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^i}{i!}$, $i = 0, 1, \dots$

18. Modelo de Bose-Einstein. Distribuímos k bolas *indistinguíveis* em n urnas, de forma que todas as configurações são igualmente prováveis. Permitimos que mais de uma bola seja colocada numa mesma urna. Seja X_j o número de bolas na urna j.

Mostre que

(a) $P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \dbinom{n+k-1}{n-1}^{-1}$ para $k_j \geq 0$ com $\sum_{j=1}^n k_j = k$.

(b) $P(X_1 = i) = \dbinom{n+k-i-2}{n-2}\dbinom{n+k-1}{n-1}^{-1}$, $i = 0, \dots, k$.

(c) $\displaystyle\lim_{n,k\to\infty,\, k/n\to\lambda\in(0,\infty)} P(X_1 = i) = \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^i$, $i = 0, 1, \dots$

19. Considere a distribuição aleatória de k bolas em n urnas como explicada nos exercícios 17 e 18. Suponha que $k \geq n$ e seja A o evento de que nenhuma urna fique vazia.

Prove que, no caso do modelo de Maxwell-Boltzmann,

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k$$

e, para o modelo de Bose-Einstein,

$$P(A) = \binom{k-1}{n-1}\binom{n+k-1}{n-1}^{-1}.$$

20. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$. Considere $X_3 = X_1 X_2$. As variáveis aleatórias X_1, X_2 e X_3 são independentes? São independentes duas a duas?

21. Uma urna contém X bolas, onde X é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ. As bolas são pintadas, de maneira independente, de vermelho com probabilidade p ou azul com probabilidade $(1-p)$. Sejam Y o número de bolas vermelhas e Z o número de bolas azuis. Prove que Y e Z são variáveis aleatórias independentes, com $Y \sim \text{Poisson}(\lambda p)$ e $Z \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p))$.

Sugestão: Para y e z números inteiros não-negativos, seja $x = y + z$. Justifique e use que

$$\begin{aligned} P(Y = y, Z = z) &= P(Y = y, Z = z \mid X = x)\, P(X = x) \\ &= \binom{x}{y} p^y\, (1-p)^z\, \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^x}{x!}. \end{aligned}$$

22. Sejam $X_0, X_1, \dots$ variáveis aleatórias i.i.d., com $P(X_0 = 1) = P(X_0 = -1) = 1/2$. Considere $Z_n = \prod_{j=0}^{n} X_j$, $n \geq 0$. Mostre que $Z_0, Z_1, \dots$ são independentes.

Sugestão: Por indução em n, prove que para todo $n \geq 0$,

$$P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = 1/2 \ \text{ e}$$

$$P(Z_0 = 1, Z_1 = 1, \dots, Z_n = 1) = 1/2^{n+1}.$$

Daí, use o tópico **2.10** para concluir que $Z_0, Z_1, \dots$ são independentes.

23. Seja $\overline{OA}$ um segmento de $\mathbb{R}$ de comprimento a. Escolhem-se dois pontos P_1 e P_2 em $\overline{OA}$ de forma aleatória e independente. Denote por X_1 e X_2 os comprimentos dos segmentos $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$, respectivamente.
Dentre P_1 e P_2, sejam Y_1 o ponto mais próximo a O e Y_2 o ponto mais próximo a A. Defina M_1 e M_2 os comprimentos dos segmentos $\overline{OY_1}$ e $\overline{OY_2}$, respectivamente.

(a) Calcule a função de distribuição da variável aleatória M = distância entre P_1 e P_2.

(b) Encontre a densidade de M.

(c) Determine a probabilidade de que com os três segmentos $\overline{OY_1}, \overline{Y_1Y_2}$ e $\overline{Y_2A}$ seja possível construir um triângulo.

Solução. (a) Temos que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição uniforme em $[0, a]$. Então, o par (X_1, X_2) tem distribuição uniforme em $B = [0, a] \times [0, a]$. Além disso,

$$\begin{aligned} M_1 &= \text{mín}\{X_1, X_2\}, \\ M_2 &= \text{máx}\{X_1, X_2\} \text{ e} \\ M &= M_2 - M_1 = |X_1 - X_2|. \end{aligned}$$

Queremos calcular $F_M(y) = P(M \leq y) = P(|X_1 - X_2| \leq y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Claramente, se $y \leq 0$, então $F_M(y) = 0$.

Para $y > 0$, definimos o conjunto $A_y = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u - v| \leq y\}$, portanto

$$F_M(y) = P((X_1, X_2) \in A_y) = \frac{\text{área}\,(A_y \cap B)}{\text{área}\,(B)}.$$

Se $y > a$, então $A_y \cap B = B$, logo $F_M(y) = 1$.

Por outro lado, se $0 < y \le a$, então (veja-se a Figura 3.4)

$$F_M(y) = \frac{a^2 - (a-y)^2}{a^2} = \frac{2ay - y^2}{a^2}.$$

Assim, a função de distribuição de M é dada por

$$F_M(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \le 0, \\ (2ay - y^2)/a^2 & \text{se } 0 < y \le a, \\ 1 & \text{se } y > a. \end{cases}$$

(b) Como F_M é contínua e derivável por partes, obtemos a densidade de M derivando F_M:

$$f_M(y) = \begin{cases} 2(a-y)/a^2 & \text{se } 0 < y < a, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que os valores de f_M nos pontos 0 e a são arbitrários.

(c) Recordamos que $M_1 = \text{mín}\{X_1, X_2\}$, $M_2 = \text{máx}\{X_1, X_2\}$ e $M = M_2 - M_1$. Os segmentos com os quais se deseja construir um triângulo têm comprimento M_1, M e $a - M_2$, logo poder construí-lo é equivalente a pedir que

$$M_1 < M + a - M_2,\ M < M_1 + a - M_2 \text{ e } a - M_2 < M_1 + M.$$

Assim, precisamos calcular $P(M_1 < a/2, M < a/2, M_2 > a/2)$. Definimos o conjunto $C = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \text{mín}\{u,v\} < a/2, |u - v| < a/2, \text{máx}\{u,v\} > a/2\}$. Então,

$$\begin{aligned} P(M_1 < a/2, M < a/2, M_2 > a/2) &= P((X_1, X_2) \in C) \\ &= \frac{\text{área}\,(C \cap B)}{\text{área}\,(B)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

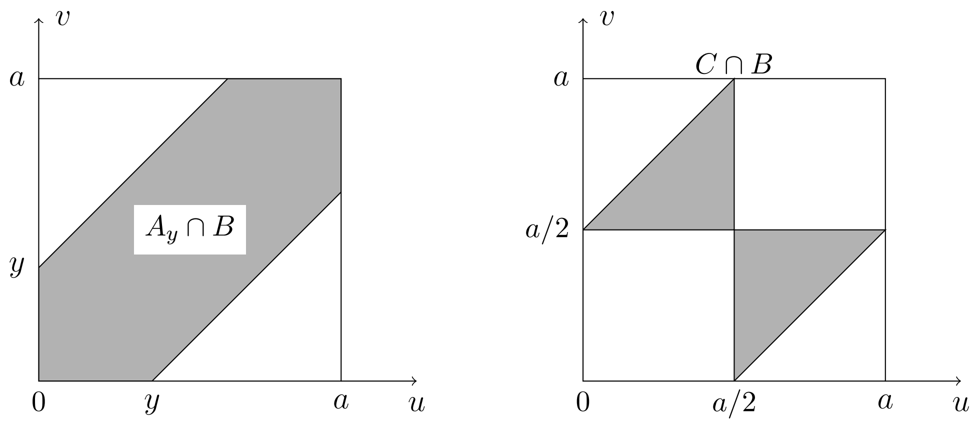


Figura 3.4: Exercício 23 – Cálculos de F_M e do item (c).

24. Um casal combina de se encontrar em certo local perto das 12:30 h. Suponha que o homem chega em uma hora uniformemente distribuída entre 12:15 h e 12:45 h e a mulher independentemente chega em uma hora uniformemente distribuída entre 12 h e 13 h. Encontre as probabilidades de que

(a) o primeiro a chegar não espere mais que 5 minutos pelo segundo;

(b) a mulher chegue primeiro.

25. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 120\,x\,(y-x)\,(1-y) & \text{se } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

(b) Mostre que $P(X \leq zY) = 3\,z^2 - 2\,z^3$ para $z \in (0,1)$.

(c) Usando o item (b), obtenha a distribuição de X/Y.

26. Lançamos seis vezes uma moeda honesta de forma independente. Seja Y a diferença entre o número de caras e coroas obtidas. Encontre a distribuição de Y.

27. Seja U uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo aberto $(0,1)$. Dado $p \in (0,1)$, obtenha a distribuição da variável aleatória

$$X = \left[\log_{1-p} U\right] = \left[\frac{\log U}{\log(1-p)}\right],$$

onde $[a]$ denota a parte inteira de a.

28. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ. Definimos uma nova variável aleatória por $Y = [X] + 1$, onde $[X]$ denota a parte inteira de X. Obtenha a distribuição de Y.

29. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0,10]$. Determine a função de distribuição das seguintes variáveis aleatórias:

(a) $Y = X^2 + 2$.

(b) $W = \text{máx}\{2, \text{mín}\{4, X\}\}$.

(c) $Z = |X - 4|$.

30. Encontre a densidade de $Y = e^{-2X}$, onde X tem distribuição exponencial de parâmetro 1.

Solução. A densidade de X é dada por

$$f(x) = e^{-x},\ x > 0.$$

Consideremos a função $\phi : (0, \infty) \to (0, 1)$ dada por $\phi(x) = e^{-2x}$. Então, ϕ é estritamente decrescente, diferenciável e

$$y = \phi(x) = e^{-2x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \phi^{-1}(y) = -\frac{1}{2}\log y,$$
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2\,y}.$$

A densidade de $Y = e^{-2X}$ é, portanto,

$$g(y) = f(\phi^{-1}(y))\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}},\ 0 < y < 1.$$

31. Distribuição Log-normal. Seja $Y = e^X$, onde X tem distribuição $N(0,1)$. Encontre a densidade de Y.

32. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme em $(0, \pi/2)$. Obtenha a densidade de $Y = \operatorname{sen} X$.

33. Determine a densidade de $Y = \operatorname{arcsen} X$ quando

(a) X tem distribuição uniforme em $(0,1)$;

(b) X tem distribuição uniforme em $(-1,1)$.

34. Encontre a densidade de $Y = |X|$, onde X tem distribuição $N(0,1)$.

35. Seja X uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } -1 < x < 0, \\ e^{-x}/2 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtenha a densidade de $Y = X^2$.

36. Sejam X e Y variáveis aleatórias i.i.d. com função densidade comum

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule a densidade conjunta de Z e W, onde $Z = XY$ e $W = X/Y$.

(b) São Z e W independentes?

Solução. (a) Notamos que a densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/(x^2\,y^2) & \text{se } x > 1, y > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam $B_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 1\}$ e $B = \{(z,w) : z > w > 0, zw > 1\}$. Consideremos a função $\phi : B_0 \to B$ definida por $\phi(x,y) = (xy, x/y)$. Então, ϕ é uma função bijetora, $\phi^{-1}(z,w) = (\sqrt{zw}, \sqrt{z/w})$ e o Jacobiano de ϕ^{-1} é igual a $-1/(2w)$. Como $(Z,W) = \phi(X,Y)$, a densidade conjunta de Z e W é dada por

$$f_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} f_{X,Y}(\sqrt{zw}, \sqrt{z/w})\,\dfrac{1}{2w} & \text{se } z > w > 0, zw > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim,

$$f_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} 1/(2z^2 w) & \text{se } z > w > 0, zw > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Observamos que

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{1/z}^{z} 1/(2z^2 w)\,dw & \text{se } z > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \log(z)/z^2 & \text{se } z > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ademais,

$$f_W(w) = \begin{cases} \int_{1/w}^{\infty} 1/(2z^2 w)\,dz & \text{se } 0 < w \le 1, \\ \int_{w}^{\infty} 1/(2z^2 w)\,dz & \text{se } w > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto,

$$f_W(w) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 < w \le 1, \\ 1/(2w^2) & \text{se } w > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Visto que a densidade conjunta não é o produto das marginais, concluímos que Z e W não são independentes.

37. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição exponencial de parâmetro 1. Calcule a densidade conjunta de $U = |X - Y|$ e $V = X + Y$, bem como as marginais.

Solução. Sejam $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, $A^\star = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < v\}$ e definimos a função $\phi : A \to A^\star$ por $\phi(x,y) = (|x-y|, x+y)$. Como ϕ não é bijetora, vamos usar o método resumido no Teorema 2.1' da seção 2.7 de James [6]. Definimos $A^{(1)} = \{(x,y) \in A : y - x > 0\}$ e $A^{(2)} = \{(x,y) \in A : y - x < 0\}$. Então, $\phi_1 := \phi|_{A^{(1)}}$ e $\phi_2 := \phi|_{A^{(2)}}$ são funções bijetoras com inversas

$$\phi_1^{-1}(u,v) = \left(\frac{v-u}{2}, \frac{u+v}{2}\right) \text{ e } \phi_2^{-1}(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$

Aplicando o teorema, obtemos que, para $0 < u < v$, a densidade conjunta de U e V é

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\left(\frac{v-u}{2}, \frac{u+v}{2}\right)\frac{1}{2} + f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} e^{-v} & \text{se } 0 < u < v, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com respeito às marginais, um cálculo simples mostra que $U \sim \text{Exp}(1)$ e $V \sim \text{Gama}(2,1)$.

38. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta f. Usando o Método do Jacobiano, determine a densidade de $Z = XY$. Escreva a densidade de Z no caso em que X e Y são independentes, com densidades f_X e f_Y, respectivamente.

Solução. Consideremos a transformação e sua inversa

$$\begin{cases} w = x \\ z = x\,y \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = w \\ y = z/w \end{cases}$$

com Jacobiano $J(w,z) = 1/w$. (Recorde-se de que $P(W = 0) = 0$).
Então, a densidade conjunta de W e Z é

$$g(w,z) = f\left(w, \frac{z}{w}\right)\frac{1}{|w|}.$$

Portanto, a densidade de $Z = XY$ é dada por

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, \frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}\,dx.$$

Assim, se X e Y são independentes com densidades respectivas f_X e f_Y,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}\,dx.$$

No cálculo de um caso particular, caso se prefira aplicar diretamente a fórmula obtida, é preciso estar atento aos valores que Z assume e aos limites da integral.

39. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição comum $N(0,1)$. Mostre que $U = (X+Y)/\sqrt{2}$ e $V = (X-Y)/\sqrt{2}$ também são independentes e $N(0,1)$.

40. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição comum $N(0,1)$. Prove que $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ e $\Phi = \text{arctg}(Y/X)$ também são independentes, $\Phi \sim U(0,2\pi)$ e R tem distribuição de Rayleigh, ou seja, tem densidade

$$f_R(r) = r\,e^{-r^2/2}, r > 0.$$

41. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com $X \sim \text{Gama}(r, \lambda)$ e $Y \sim \text{Gama}(s, \lambda)$, onde $\lambda > 0$, $r > 0$ e $s > 0$. Mostre que $P = X + Y$ e $Q = X/(X+Y)$ também são independentes, $P \sim \text{Gama}(r+s, \lambda)$ e $Q \sim \text{Beta}(r, s)$.

42. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 6y & \text{se } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule as densidades marginais de X e Y. São X e Y independentes?

(b) Calcule a função densidade de $Z = Y/X$.

43. Seja X a variável aleatória que representa o peso em toneladas de uma certa mercadoria que uma loja armazena no início de cada mês de forma a satisfazer a demanda dos clientes. Seja Y o peso em toneladas da mercadoria vendida durante o mês. Suponha que a função densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{10\,x} & \text{se } 0 < y < x < 10, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Obtenha a densidade do peso da mercadoria que sobra armazenada ao final do mês.

(b) Calcule a probabilidade de que o peso da mercadoria armazenada ao início do mês seja superior a 8 toneladas e o peso da mercadoria vendida inferior a 4 toneladas.

(c) Dado que em um mês as vendas não superaram 5 toneladas, qual a probabilidade de que ao final do mês restem armazenadas mais do que 3 toneladas?

44. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} k\,xy & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Obtenha k.

(b) Calcule as densidades marginais de X e Y.

(c) São X e Y independentes?

(d) Calcule as seguintes probabilidades: $P(X \geq Y)$, $P(X \geq 1/2 \,|\, X + Y \leq 3/4)$ e $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

(e) Obtenha a densidade conjunta de $U = X+Y$ e $V = X-Y$, bem como as marginais.

45. Escolhe-se ao acaso um ponto $P = (X, Y)$ do quadrado unitário $(0,1) \times (0,1)$. Seja Θ o ângulo formado entre o eixo x e o segmento que une a origem e P. Encontre a densidade de Θ.

46. Sejam Θ_1 e Θ_2 variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição uniforme em $(0, 2\pi)$. Então, $P_1 = (X_1, Y_1) = (\cos\Theta_1, \operatorname{sen}\Theta_1)$ e $P_2 = (X_2, Y_2) = (\cos\Theta_2, \operatorname{sen}\Theta_2)$ são dois pontos escolhidos de forma aleatória e independente na circunferência de raio unitário. Considere $Z = (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2$ o quadrado da distância entre P_1 e P_2. Calcule a densidade da variável aleatória Z.

Sugestão: Defina

$$\Theta = \begin{cases} |\Theta_1 - \Theta_2| & \text{se } |\Theta_1 - \Theta_2| < \pi, \\ 2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2| & \text{se } \pi \leq |\Theta_1 - \Theta_2| < 2\pi \end{cases}$$

e mostre que para $0 < y < \pi$,

$$P(\Theta \leq y) = P(|\Theta_1 - \Theta_2| \leq y) + P(2\pi - y \leq |\Theta_1 - \Theta_2| < 2\pi) = \frac{y}{\pi}.$$

(Ou seja, Θ tem distribuição uniforme em $(0, \pi)$). Então, use que $Z = 2 - 2\cos\Theta$.

Respostas

1. (a) Binomial $(n = 15, p = 0,8)$ (b) $0,035$ (c) $0,83$

2. (a) Binomial $(n = 10, p = 1/5)$ (b) $4,2 \,.\, 10^{-6}$ (c) $0,62$

3. $0,014$; $0,036$

5. (a) $P(X = 0) = 0,54$, $P(X = 1) = 0,36$, $P(X = 2) = 0,09$, $P(X = 3) = 0,01$
(b) $0,54$

6. (a) $24/169$ (b) $1/24$

7. (a) $2/9$ (b) $19/36$

8. $3/5$

10. (a) $f(y) = (1/8)\exp\{-(y-3)/8\}$, $y > 3$ (b) $0,325$

11. $0,068$

12. $0,45$

13. $0,8363$

14. ≈ 1

15.

$X \setminus Y$	0	1	2	$p_X(x)$
1	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$3/10$
2	$2/5$	$1/5$	0	$3/5$
3	$1/10$	0	0	$1/10$
$p_Y(y)$	$3/5$	$3/10$	$1/10$	1

16. (a)

$X \setminus Y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	1/30	1/10	1/30	1/6
1	1/5	4/15	1/30	1/2
2	1/5	1/10	0	3/10
3	1/30	0	0	1/30
$p_Y(y)$	7/15	7/15	1/15	1

(b) $P(Y \geq 1) = 8/15$ (c) $P(X > Y) = 8/15$

20. X_1, X_2 e X_3 não são independentes, mas são independentes duas a duas.

24. (a) $1/6$ (b) $1/2$

25. (a) $X \sim \text{Beta}(2,4)$ e $Y \sim \text{Beta}(4,2)$ (c) $X/Y \sim \text{Beta}(2,2)$

26. $P(Y = k) = \binom{6}{(k+6)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^6$, $k = -6,-4,-2,0,2,4,6$

27. $P(X = k) = p\,(1-p)^k$, $k = 0,1,\ldots$

28. Geométrica$(1 - e^{-\lambda})$

29. (a) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 2, \\ \sqrt{y-2} & \text{se } 2 \leq y < 102, \\ 1 & \text{se } y \geq 102. \end{cases}$

(b) $F_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{se } w < 2, \\ w/10 & \text{se } 2 \leq w < 4, \\ 1 & \text{se } w \geq 4. \end{cases}$

(c) $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 0, \\ z/5 & \text{se } 0 \leq z < 4, \\ z/10 + 2/5 & \text{se } 4 \leq z < 6, \\ 1 & \text{se } z \geq 6. \end{cases}$

31. $f_Y(y) = y^{-1}(2\pi)^{-1/2}\exp\{-(\log y)^2/2\}, y > 0$

32. $f_Y(y) = 2/(\pi\sqrt{1-y^2}), 0 < y < 1$

33. (a) $f_Y(y) = \cos y, 0 < y < \pi/2$ (b) $f_Y(y) = (1/2)\cos y, -\pi/2 < y < \pi/2$

34. $f_Y(y) = (2/\pi)^{1/2}\exp\{-y^2/2\}, y > 0$

35. $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}}\left(1 + e^{-\sqrt{y}}\right) & \text{se } 0 \leq y < 1, \\ \dfrac{1}{4\sqrt{y}}\, e^{-\sqrt{y}} & \text{se } y \geq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

42. (a) $f_X(x) = 3\,x^2, 0 < x < 1,\ f_Y(y) = 6\,y\,(1-y), 0 < y < 1;$

X e Y não são independentes.

(b) $f_Z(z) = 2\,z, 0 < z < 1$

43. (a) $f_Z(z) = (1/10)\log(10/z), 0 < z < 10$

(b) $P(X > 8, Y < 4) = 0,0893$

(c) $P(X - Y > 3 \,|\, Y \leq 5) = 0,375$

44. (a) $k = 24$ (b) $f_X(x) = f_Y(x) = 12\,x\,(1-x)^2, 0 \leq x \leq 1$ (c) Não

(d) $P(X \geq Y) = 1/2$, $P(X \geq 1/2 \,|\, X + Y \leq 3/4) = 1/9$ e $P(X^2 + Y^2 \leq 1) = 1$

(e) $g(u,v) = 3\,(u^2 - v^2), -u \leq v \leq u \leq 1;$

$f_U(u) = 4\,u^3, 0 \leq u \leq 1;\ f_V(v) = 1 - 3\,v^2 + 2\,|v^3|, -1 \leq v \leq 1$

45. $f_{Y/X}(z) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 < z \leq 1, \\ 1/(2\,z^2) & \text{se } z > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \Rightarrow f_\Theta(\theta) = \begin{cases} 1/(2\cos^2\theta) & \text{se } 0 < \theta \leq \pi/4, \\ 1/(2\,\text{sen}^2\,\theta) & \text{se } \pi/4 < \theta < \pi/2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

46. $f_Z(z) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{z - z^2/4}},\ z \in (0,4)$

Capítulo 4

Esperança

1. Definições e propriedades

1.1. A *esperança* (*média*, *valor esperado*) de uma variável aleatória X é definida por

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x x\,P(X=x) & \text{se } X \text{ é discreta,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx & \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f. \end{cases}$$

Observação. A esperança está definida somente quando a soma (integral) é bem definida. Assim,

$$E(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\geq 0} x\,P(X=x) - \sum_{x<0} (-x)\,P(X=x) & \text{se } X \text{ é discreta,} \\ \displaystyle\int_{x\geq 0} x\,f(x)\,dx - \int_{x<0} (-x)\,f(x)\,dx & \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f \end{cases}$$

e portanto $E(X)$ está definida desde que ambas as somas (integrais) não sejam $+\infty$. Em caso contrário, dizemos que $E(X)$ não existe (ou que X não tem valor esperado).

Observamos que, em particular, $E(X)$ está bem definida se $P(X \geq 0) = 1$.

Como um exemplo de uma variável aleatória cuja esperança não existe, seja X assumindo valores em $\mathbb{Z}^* = \{\dots,-1,0,1,\dots\} \setminus \{0\}$ com função de probabilidade dada por

$$P(X=x) = \frac{1}{2\,|x|\,(1+|x|)},\ x \in \mathbb{Z}^*.$$

Para ver por que esta é uma função de probabilidade, note que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(1+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{1+k}\right] = 1.$$

Como $\sum_{x>0} x\,P(X=x) = \sum_{x<0} (-x)\,P(X=x) = \infty$, $E(X)$ não existe.

1.2. Para qualquer função g a valores reais,

$$E[g(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x g(x)\,P(X=x) & \text{se } X \text{ é discreta,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx & \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f. \end{cases}$$

1.3. Dizemos que a variável aleatória X é *integrável* se $E(X)$ é finita. Isto é equivalente a que $E|X| < \infty$.

1.4. Para $n \geq 1$, o *n-ésimo momento* de uma variável aleatória X é $E(X^n)$ (se existe).

1.5. A *variância* de uma variável aleatória X integrável com esperança μ é dada por

$$\mathrm{Var}(X) = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2.$$

1.6. Se a e b são constantes, então

$$E(a\,X + b) = a\,E(X) + b \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}(a\,X + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

1.7. (a) Se X é uma variável aleatória inteira e não-negativa, então

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

(b) Se X é uma variável aleatória contínua que assume apenas valores não-negativos, então

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > t)\,dt.$$

1.8. (a) Se X e Y têm uma função de probabilidade conjunta $p(x, y)$, então

$$E[\varphi(X,Y)] = \sum_x \sum_y \varphi(x,y)\,p(x,y).$$

(b) Se X e Y têm uma função densidade conjunta $f(x, y)$, então

$$E[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy.$$

1.9. Se $P(X \geq Y) = 1$, então $E(X) \geq E(Y)$.

1.10. $E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

1.11. Se $X_1, \ldots, X_n$ são independentes, então

$$E\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

1.12. A *covariância* entre duas variáveis aleatórias X e Y integráveis é dada por

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) = E(XY) - E(X)\,E(Y).$$

Assim, $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ se X e Y são independentes. (Porém a recíproca *não* é sempre verdadeira).

1.13. $\operatorname{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\,X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j\,Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\,b_j \operatorname{Cov}(X_i,Y_j)$, onde os a_i e b_j são números reais.

1.14. $\operatorname{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) \,+\, 2 \sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{Cov}(X_i,X_j).$

1.15. $\operatorname{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i)$ se $X_1,\dots,X_n$ são independentes.

Observação. Recorde-se de que **1.10** e **1.14** são úteis para determinar a esperança e a variância de muitas variáveis aleatórias pelo uso de funções indicadoras.

1.16. Sejam X e Y variáveis aleatórias com variâncias finitas e positivas. O *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = E\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right],$$

onde $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$ e $\sigma_Y = \sqrt{\operatorname{Var}(Y)}$.

Propriedades:

(i) $|\rho(X,Y)| \le 1$.

(ii) Se $\rho(X,Y) = \pm 1$, então os valores de X e Y pertencem a uma reta.

2. Distribuição e esperança condicionais

2.1. Caso discreto: Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, a *função de probabilidade condicional* de X dado que $Y=y$ é definida por

$$p_{X|Y}(x\,|\,y) = P(X=x\,|\,Y=y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)},$$

para todos os valores de y tais que $p_Y(y) > 0$. Neste caso, a *esperança condicional* de X dado que $Y=y$ é

$$E(X\,|\,Y=y) = \sum_x x\,p_{X|Y}(x\,|\,y).$$

2.2. Caso contínuo: Se X e Y são conjuntamente contínuas com função densidade conjunta $f(x,y)$, a *função densidade condicional* de X dado que $Y=y$ é definida para todos os valores de y tais que $f_Y(y)>0$ por

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

A *esperança condicional* de X dado que $Y=y$ é, neste caso,

$$E(X\,|\,Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,dx.$$

2.3. Para $B\subset\mathbb{R}$,

$$P(X\in B\,|\,Y=y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{x\in B}P(X=x\,|\,Y=y) & \text{no caso discreto,}\\ \displaystyle\int_B f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,dx & \text{no caso contínuo.}\end{cases}$$

2.4. A esperança condicional de X dado que $Y=y$ é simplesmente a esperança de X com respeito à distribuição condicional de X dado que $Y=y$. Assim, desfruta de propriedades análogas às da esperança comum. Por exemplo,

$$E(a\,X_1+b\,X_2\,|\,Y=y)=a\,E(X_1\,|\,Y=y)+b\,E(X_2\,|\,Y=y);$$

$$E(g(X)\,|\,Y=y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{x}g(x)\,P(X=x\,|\,Y=y) & \text{no caso discreto,}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,dx & \text{no caso contínuo.}\end{cases}$$

2.5. Princípio da substituição para a esperança condicional:

$$E\left(\varphi(X,Y)\,|\,Y=y\right)=E\left(\varphi(X,y)\,|\,Y=y\right).$$

Corolário: $E\left(g(X)\,h(Y)\,|\,Y=y\right)=h(y)\,E\left(g(X)\,|\,Y=y\right)$.

2.6. Propriedade fundamental: $E\left(E(X\,|\,Y)\right)=E(X)$.

(a) $E(X\,|\,Y)$ é uma variável aleatória (uma função de Y) cuja esperança é igual a $E(X)$.

(b) $E(X)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{y}E(X\,|\,Y=y)\,P(Y=y) & \text{se } Y \text{ é discreta,}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}E(X\,|\,Y=y)\,f_Y(y)\,dy & \text{se } Y \text{ é contínua com densidade } f_Y.\end{cases}$

(c) $P(A)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{y}P(A\,|\,Y=y)\,P(Y=y) & \text{se } Y \text{ é discreta,}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}P(A\,|\,Y=y)\,f_Y(y)\,dy & \text{se } Y \text{ é contínua com densidade } f_Y.\end{cases}$

3. Funções geradoras

3.1. A *função geradora de momentos* da variável aleatória X é definida por

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{tx}\, P(X = x) & \text{se } X \text{ é discreta,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x)\, dx & \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f, \end{cases}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que a esperança seja finita.

Observação. Suporemos que o domínio de M_X contém um intervalo em torno de $t = 0$.

3.2. Propriedades:

1. $\displaystyle \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\bigg|_{t=0} = E(X^n)$, $n \geq 1$.

2. Para $a, b \in \mathbb{R}$, $M_{aX+b}(t) = e^{tb}\, M_X(at)$.

3. A função geradora de momentos determina unicamente a distribuição.

4. Se $X_1, \ldots, X_k$ são variáveis aleatórias independentes com funções geradoras de momentos respectivas $M_{X_1}(t), \ldots, M_{X_k}(t)$, então a função geradora de momentos de $X_1 + \cdots + X_k$ é dada por

$$M_{X_1 + \cdots + X_k}(t) = M_{X_1}(t) \ldots M_{X_k}(t).$$

3.3. Sejam $X_1, \ldots, X_k$ variáveis aleatórias independentes.

- Se $X_i \sim \text{Binomial}(n_i, p)$, $i = 1, \ldots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Binomial}(\sum_{i=1}^k n_i, p)$.
- Se $X_i \sim \text{Binomial Negativa}(r_i, p)$, $i = 1, \ldots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim$ Binomial Negativa $(\sum_{i=1}^k r_i, p)$.
- Se $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Poisson}(\sum_{i=1}^k \lambda_i)$.
- Se $X_i \sim \text{Gama}(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, \ldots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Gama}(\sum_{i=1}^k \alpha_i, \lambda)$.
- Se $X_i \sim \text{Normal}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Normal}(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2)$.

Observação. Se X é uma variável aleatória inteira e não-negativa, é preferível trabalhar com a *função geradora de probabilidade* de X, que é definida por

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x\, P(X = x),\ s \in [-1, 1].$$

Note que neste caso $M_X(t) = G_X(e^t)$.

Propriedades:

(i) $G_X(1) = P(X < \infty) = 1$.

(ii) $\left.\dfrac{d^n}{dt^n}\,G_X(t)\right|_{t=1} = E\left[X(X-1)\ldots(X-n+1)\right],\ n \geq 1$.

A *função característica* de uma variável aleatória X é a função $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E\left(\cos(tX)\right) + i\ E\left(\operatorname{sen}(tX)\right),\ t \in \mathbb{R},$$

onde o símbolo i representa a unidade imaginária $\sqrt{-1}$. A principal vantagem de trabalhar com a função característica reside no fato de ser definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

	$p_X(x)$	$M_X(t)$	μ_X	σ_X^2
Uniforme Discreta(n)	$\frac{1}{n},\ x=1,\ldots,n$	$\frac{e^t\,(e^{n\,t}-1)}{n\,(e^t-1)}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomial(n,p)	$\binom{n}{x}p^x q^{n-x},\ x=0,1,\ldots,n$	$(p\,e^t+q)^n$	np	npq
Poisson(λ)	$\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!},\ x=0,1,\ldots$	$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ
Geométrica(p)	$p\,q^{x-1},\ x=1,2,\ldots$	$\frac{p\,e^t}{1-q\,e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomial Negativa(r,p)	$\binom{x-1}{r-1}p^r\,q^{x-r},\ x=r,r+1,\ldots$	$\left(\frac{p\,e^t}{1-q\,e^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Hipergeométrica(n,R,N)	$\binom{N-R}{n-x}\binom{R}{x}\binom{N}{n}^{-1}$	$*$	$\frac{n\,R}{N}$	$n\left(\frac{R}{N}\right)\left(1-\frac{R}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Tabela 4.1: Distribuições discretas. Como de costume, $q = 1 - p$. Para a distribuição uniforme discreta, a fórmula indicada para $M_X(t)$ é válida para $t \neq 0$. Para as distribuições geométrica e binomial negativa, o domínio de M_X é $(-\infty, -\log(1-p))$. Para a distribuição hipergeométrica, os valores possíveis são $\text{máx}(0, n-N+R) \leq x \leq \text{mín}(n, R)$ e a função geradora de momentos foi substituída por um asterisco pois não é útil.

	$f_X(x)$	$M_X(t)$	μ_X	σ_X^2
Uniforme(a,b)	$\frac{1}{b-a},\ a \le x \le b$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t\,(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal(μ,σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},\ x \in \mathbb{R}$	$e^{\mu t+\sigma^2 t^2/2}$	μ	σ^2
Exponencial(λ)	$\lambda\,e^{-\lambda x},\ x \ge 0$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ para $t<\lambda$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gama(α,λ)	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,x^{\alpha-1}\,e^{-\lambda x},\ x \ge 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$ para $t<\lambda$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Beta(a,b)	$\frac{1}{B(a,b)}\,x^{a-1}(1-x)^{b-1},\ 0 \le x \le 1$	$*$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{a\,b}{(a+b+1)(a+b)^2}$
Cauchy(a,b)	$\frac{1}{\pi\,b\left\{1+[(x-a)/b]^2\right\}},\ x \in \mathbb{R}$	$\varphi_X(t) = e^{i\,a\,t-b\,\lvert t\rvert}$	–	–

Tabela 4.2: Distribuições contínuas. Para a distribuição uniforme, a fórmula indicada para $M_X(t)$ é válida para $t \neq 0$. A função geradora de momentos da distribuição Beta foi substituída por um asterisco pois não é útil. Para a distribuição de Cauchy, é indicada a função característica.

4. Desigualdades

4.1. Desigualdade de Markov: Se $X \geq 0$, então, para qualquer $\lambda > 0$,

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}.$$

4.2. Desigualdade de Markov Generalizada: Seja X uma variável aleatória qualquer. Para todo $t > 0$,

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{E|X|^t}{\lambda^t},\ \forall\, \lambda > 0.$$

4.3. Desigualdade de Chebyshev: Seja X uma variável aleatória com $E(X) < \infty$. Então, para qualquer $\lambda > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\lambda^2}.$$

4.4. Limitantes de Chernoff: Para quaisquer variável aleatória X e $a \in \mathbb{R}$,

$$P(X \geq a) \leq e^{-ta}\, M_X(t) \quad \text{para todo } t > 0;$$

$$P(X \leq a) \leq e^{-ta}\, M_X(t) \quad \text{para todo } t < 0.$$

4.5. Desigualdade de Jensen: Sejam X uma variável aleatória, φ uma função convexa, e suponhamos que $E(|X|) < \infty$ e $E(|\varphi(X)|) < \infty$. Então,

$$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X)).$$

4.6. Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Se as variáveis aleatórias X e Y têm variâncias finitas, então

$$|E(XY)| \leq (E(X^2)\, E(Y^2))^{1/2}.$$

Exercícios

1. Duas bolas são escolhidas aleatoriamente de uma urna contendo 4 bolas azuis, 3 vermelhas e 2 laranjas. Suponha que ganhamos 10 reais para cada bola azul selecionada, ganhamos 1 real para cada bola laranja, porém perdemos 8 reais para cada bola vermelha. Seja X o nosso lucro.

(a) Determine a função de probabilidade de X.

(b) Obtenha o valor esperado e a variância de X.

2. Considere o seguinte jogo. Um indivíduo aposta em um dos números de 1 a 6. Três dados honestos são então lançados, de maneira independente, e, se o número apostado aparecer i vezes, $i = 1, 2, 3$, o apostador ganha i reais; caso o número apostado não apareça em nenhum dos dados, o apostador perde 1 real. Seja X o ganho do apostador no jogo. Determine a função de probabilidade de X e, com base na esperança de X, julgue se o jogo é honesto ou não para o apostador.

3. Exatamente uma de seis chaves de aspecto semelhante abre uma determinada porta. Testa-se uma chave após a outra. Qual o número médio de tentativas necessárias para se conseguir abrir a porta?

4. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro λ, $\lambda > 0$. Obtenha

(a) $E\left[(1+X)^{-1}\right]$.

(b) $E(2^X)$.

(c) $E(X!)$.

Para quais valores de λ a variável aleatória $X!$ é integrável?

5. Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica de parâmetro p. Mostre que

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{p \log p}{1-p}.$$

Sugestão: Use que $\displaystyle\int (1-p)^{x-1}\, dp = -\frac{(1-p)^x}{x}$.

6. Seja Z uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Para $x \in \mathbb{R}$ fixado, defina

$$X = \begin{cases} Z & \text{se } Z > x, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que $E(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$.

7. Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas vermelhas. Retiram-se duas bolas da urna, uma após a outra, sem reposição. Seja X igual a 0 ou 1, conforme a primeira bola retirada seja vermelha ou branca, e seja Y igual a 0 ou 1, conforme a segunda bola retirada seja vermelha ou branca. Determine:

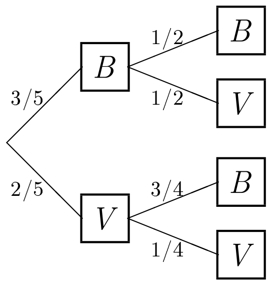
(a) a função de probabilidade conjunta de X e Y, bem como as marginais;

(b) se X e Y são independentes;

(c) $E(2X + 8Y)$;

(d) a covariância entre X e Y.

Solução. (a) Utilizando uma árvore, podemos obter o espaço amostral, probabilidades e valores de X e Y correspondentes:



$X = 1$	$Y = 1$	Prob. $= 3/10$
$X = 1$	$Y = 0$	Prob. $= 3/10$
$X = 0$	$Y = 1$	Prob. $= 3/10$
$X = 0$	$Y = 0$	Prob. $= 1/10$

onde B e V denotam respectivamente 'bola branca' e 'bola vermelha'.
Dessa forma, a função de probabilidade conjunta de X e Y e as marginais ficam:

$X \setminus Y$	0	1	$p_X(x)$
0	$1/10$	$3/10$	$2/5$
1	$3/10$	$3/10$	$3/5$
$p_Y(y)$	$2/5$	$3/5$	1

(b) X e Y não são independentes:

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{10} \neq P(X = 0)\, P(Y = 0) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

(c) Temos

$$E(X) = E(Y) = 0 \,.\, \frac{2}{5} + 1 \,.\, \frac{3}{5} = \frac{3}{5},$$

portanto, pela linearidade da esperança,

$$E(2X + 8Y) = 2\, E(X) + 8\, E(Y) = 6.$$

(d) Visto que $E(XY) = 1 \,.\, 1 \,.\, 3/10 = 3/10$, obtemos

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)\, E(Y) = -\frac{3}{50}.$$

8. Cada lançamento de um dado não honesto resulta em cada um dos números ímpares 1, 3, 5 com probabilidade C e em cada um dos números pares 2, 4, 6 com probabilidade $2C$.

(a) Determine C.

Suponha que o dado é lançado e considere as seguintes variáveis aleatórias:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se o resultado é um número par,} \\ 0 & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se o resultado é um número maior que 3,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y, bem como as marginais. X e Y são independentes?

(c) Obtenha $P(X = 0 \,|\, Y = 1)$.

(d) Calcule $E(2^X - 12\,Y + 6)$.

(e) Calcule $\text{Var}(X + Y)$.

9. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Prove que f é uma função densidade de probabilidade.

(b) Determine $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

(c) Calcule $P(|X| \geq k)$, onde k é um número $0 < k < 1$.

(d) Utilizando a desigualdade de Chebyshev, obtenha uma cota superior para a probabilidade anterior.

(e) Para $k = 0,2$ e $k = 0,8$, obtenha os valores númericos da probabilidade calculada em (c) e da cota obtida em (d). Comente.

10. Em um problema envolvendo variáveis aleatórias independentes X e Y, um estudante calcula, corretamente, que

$$E(Y) = 2, \quad E(X^2Y) = 6, \quad E(XY^2) = 8, \quad E((XY)^2) = 24.$$

Você pode ajudá-lo, determinando o valor de $E(X)$?

11. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 2\,e^{-2x}/x & \text{se } 0 \leq y \leq x < \infty, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

12. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)e^{-(x+y)},\ x \geq 0, y \geq 0.$$

(a) X e Y são independentes?

(b) Calcule a função densidade de $Z = X + Y$.

(c) Obtenha $E\left[(X + Y)^{-1}\right]$.

13. Sejam X, Y e Z variáveis aleatórias independentes, com variâncias iguais e positivas. Determine o coeficiente de correlação entre $X + Y$ e $X + Z$.

14. Sejam X e Y variáveis aleatórias com variâncias iguais a $\sigma^2 > 0$ e coeficiente de correlação ρ. Calcule a variância da média aritmética de X e Y. Conclua que a média aritmética de X e Y tem variância menor ou igual a σ^2.

15. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição uniforme em $[0,1]$, e considere $U = \text{mín}\{X,Y\}$ e $V = \text{máx}\{X,Y\}$. Calcule $\text{Cov}(U,V)$.

Sugestão: Não é necessário obter a densidade conjunta de U e V para determinar $E(UV)$.

16. Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, tal que, para cada $n \geq 1$, $X_n \sim \text{Exp}(n)$, ou seja, X_n tem densidade de probabilidade dada por

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} n\,e^{-nx} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Obtenha a distribuição de $Y = \text{mín}\{X_1, X_2, X_3\}$.

(b) Determine $E\left(e^{-\sum_{n=1}^{100} X_n}\right)$.

17. Um vaso contém 20 cartões, dois deles marcados 1, dois marcados 2, ..., dois marcados 10. Cinco cartões são retirados ao acaso do vaso. Qual é o número esperado de pares que permanecem ainda no vaso?

(Este problema foi colocado e resolvido no século XVIII por Daniel Bernoulli, como um modelo probabilístico para determinar o número de casamentos que permanecem intactos quando ocorre um total de m mortes entre N casais; em nosso caso, $m = 5$ e $N = 10$).

Solução. Seja X o número de pares que permanecem no vaso após a retirada dos cinco cartões. Então,

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10},$$

onde, para $i = 1, 2, \ldots, 10$,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{-ésimo par permanece no vaso,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Porém, para $i = 1, 2, \ldots, 10$,

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{21}{38}.$$

Assim, obtemos

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{10}) = 10\,.\,\frac{21}{38} = \frac{105}{19} \approx 5,53.$$

Observação. Embora mais trabalhoso, pode-se obter a distribuição de X e calcular o valor esperado pela definição. De fato,

$$P(X = 5) = \frac{\binom{10}{5}\,2^5}{\binom{20}{5}} = \frac{168}{323},$$

$$P(X = 6) = \frac{\binom{10}{1}\binom{9}{3}\,2^3}{\binom{20}{5}} = \frac{140}{323},$$

$$P(X=7)=\frac{\binom{10}{2}\binom{16}{1}}{\binom{20}{5}}=\frac{15}{323},$$

portanto

$$E(X)=\sum_x x\,P(X=x)=\frac{105}{19}\approx 5,53.$$

18. Um ônibus parte com 20 pessoas e tem em seu trajeto 10 pontos diferentes, parando em um ponto somente se uma ou mais pessoas solicitarem. Suponha que cada passageiro escolhe com igual probabilidade o ponto em que vai parar e que as escolhas são independentes de passageiro para passageiro. Determine o número esperado de paradas feitas pelo ônibus.

Solução. Se X é o número de de paradas feitas pelo ônibus, escrevemos

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10},$$

onde

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{se pelo menos uma pessoa solicita a parada no ponto } i,\\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Então, para $i=1,\dots,10$,

$$\begin{aligned}E(X_i)&=P(X_i=1)\\&=P(\text{Pelo menos uma pessoa solicita a parada no ponto } i)\\&=1-P(\text{Nenhuma pessoa solicita a parada no ponto } i)\\&=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}.\end{aligned}$$

Portanto, pela linearidade da esperança,

$$E(X)=10\,.\,E(X_1)=10\,.\left(1-(0,9)^{20}\right)\approx\ 8,78.$$

Observação. É possível, porém mais trabalhoso, obter a distribuição de X e calcular o valor esperado pela definição. De fato, para $x=1,\dots,10$,

$$P(X=x)=\binom{10}{x}\left[\sum_{j=0}^{x-1}(-1)^j\binom{x}{j}(x-j)^{20}\right]\left(\frac{1}{10}\right)^{20},$$

onde o termo entre colchetes é o número de maneiras com que podemos distribuir $n=20$ bolas distintas em x urnas distintas de modo que nenhuma urna fique vazia (o qual pode ser obtido pelo Princípio da Inclusão-Exclusão). Assim,

$$E(X)=\sum_{x=1}^{10}x\,P(X=x)\approx 8,78.$$

19. Uma sorveteria oferece 36 sabores diferentes de sorvete. Uma pessoa é encarregada de escolher ao acaso 10 sorvetes dessa sorveteria, podendo repetir o sabor. Por ao acaso, queremos dizer que todas as escolhas possíveis têm a mesma probabilidade. Qual o número esperado de sabores diferentes que serão escolhidos?

20. Seis pares diferentes de meias são colocados em uma lavadora (doze meias ao todo, e cada meia tem um único par), porém apenas sete meias retornam. Qual o número esperado de pares de meias que retornam?

21. Um círculo de raio 1 é lançado em uma folha de tamanho infinito dividida em quadrados iguais de lado com comprimento 1. Suponha que o centro do círculo está uniformemente distribuído no quadrado em que cai. Calcule o número esperado de vértices do quadrado que estão dentro do círculo.

22. Escolhem-se ao acaso e sem reposição 10 números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 30\}$. Calcule o valor esperado da soma dos números escolhidos.

23. Uma marca de biscoitos lança uma promoção que consiste em oferecer um adesivo em cada pacote de biscoito. Existem n adesivos diferentes e a probabilidade de um pacote conter qualquer um dos adesivos é a mesma. Qual o número esperado de pacotes que devem ser comprados para juntar os n adesivos diferentes?

24. Suponha que 8 casais sentam-se ao acaso em um banco de 16 lugares. Detemine a esperança e a variância do número de mulheres que estão sentadas ao lado dos maridos.

25. Um grupo de nove amigos que se reúnem para jogar futebol é composto por 2 goleiros, 3 zagueiros e 4 atacantes. Se os jogadores são agrupados ao acaso em três trios (grupos de tamanho 3), encontre a esperança e a variância do números de trios formados por um jogador de cada tipo.

26. São realizados n lançamentos independentes de uma moeda, com probabilidade p de cara em cada lançamento ($0 < p < 1$). Uma *seguida* é uma seqüência de lançamentos de mesmo resultado; por exemplo, a seqüência CCKCKKC contém 5 seguidas. Obtenha a esperança e a variância do número de seguidas nos n lançamentos.

27. Esperança e variância da distribuição hipergeométrica.
Suponha que temos uma população de N objetos, dos quais R são do tipo 1 e $N - R$ são do tipo 2. Escolhem-se desta população n objetos ao acaso, sem reposição ($n \leq N$). Determine a esperança e a variância do número de objetos do tipo 1 escolhidos.

28. Suponha que temos r bolas distintas que são aleatoriamente distribuídas em n urnas ($r > 0, n > 0$). Calcule a esperança e a variância do número de urnas vazias após a distribuição.

29. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ com distribuição multinomial de parâmetros $m, p_1, \ldots, p_n$. Obtenha a covariância entre X_i e X_j para $i \neq j$.

30. Considere um grafo com n vértices numerados $1, 2, \ldots, n$, e suponha que cada um dos $\binom{n}{2}$ pares de vértices distintos é ligado por um elo, independentemente, com probabilidade p. Seja D_i o grau do vértice i, isto é, o número de elos que têm o vértice i como uma de suas extremidades.

(a) Qual é a distribuição de D_i?

(b) Determine a correlação entre D_i e D_j para $i \neq j$.

Sugestão: Defina $I_{i,j}$ a função indicadora do evento de que há um elo entre os vértices i e j.

31. Seja (X, Y) um ponto escolhido aleatoriamente no quadrado $(0,1) \times (0,1)$. Calcule $E(X|XY)$.

Solução. A densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $Z = XY$. Usando o Método do Jacobiano, obtemos a densidade conjunta de X e Z:

$$f_{X,Z}(x,z) = \begin{cases} 1/x & \text{se } 0 < z < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, calculamos a densidade marginal de Z. Para $0 < z < 1$,

$$f_Z(z) = \int_z^1 1/x \, dx = -\log z.$$

Portanto, para $0 < z < 1$,

$$f_{X|Z}(x|z) = -\frac{1}{x \log z}, \; z < x < 1.$$

Assim,

$$E(X|Z = z) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X|Z}(x|z) \, dx = \int_z^1 \left(-\frac{1}{\log z} \right) dx = \frac{z-1}{\log z}.$$

Finalmente,

$$E(X|XY) = \frac{XY - 1}{\log(XY)}.$$

32. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 8\,x\,y & \text{se } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $E(X \,|\, Y)$ e $E(Y \,|\, X)$.

33. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\,\exp\{-y^2\} & \text{se } 0 < x < y, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Obtenha a densidade condicional de X dado que $Y = y$.

(b) Calcule $E(X^3 \,|\, Y = y)$.

34. Uma farmácia possui uma quantidade X de centenas de unidades de um certo remédio no início de cada mês. Durante o mês, vendem-se Y centenas de unidades desse remédio. Suponha que

$$f(x,y) = \begin{cases} 2/9 & \text{se } 0 < y < x < 3, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é a função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y.

(a) Mostre que de fato f é uma densidade.

(b) Calcule a probabilidade de que ao final do mês a farmácia tenha vendido pelo menos a metade das unidades que havia inicialmente.

(c) Dado que foram vendidas cem unidades, qual a probabilidade de que havia pelo menos duzentas unidades no começo do mês?

35. Uma companhia telefônica deseja realizar uma análise sobre a repercussão que as novas tarifas tiveram no número de chamadas. Levando em conta que as chamadas se classificam em locais, interurbanas e internacionais, um estudo realizado em um grupo de famílias revelou que as proporções de chamadas locais X e interurbanas Y durante um mês têm a seguinte densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 6\,x & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule a probabilidade de que a proporção de chamadas locais realizadas por uma família em um mês seja superior a 70%.

(b) Obtenha a probabilidade de que em uma família a proporção de chamadas locais em um mês seja inferior à de interurbanas.

(c) Determine a densidade correspondente à proporção total de chamadas locais e interurbanas.

(d) Calcule a probabilidade de que a proporção de chamadas internacionais realizadas por uma família em um mês seja superior a 20%.

(e) Dado que em um mês uma família não fez chamadas internacionais, qual a probabilidade de que pelo menos 60% das chamadas tenham sido locais?

36. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição de Poisson com parâmetros respectivos λ e μ, e considere $Z = X+Y$. Determine a distribuição condicional de X dado que $Z = z$.

37. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuições $\text{Bin}(m,p)$ e $\text{Bin}(n,p)$, respectivamente, e considere $Z = X + Y$. Obtenha a distribuição condicional de X dado que $Z = z$.

38. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição comum geométrica com parâmetro p $(0 < p < 1)$, e considere $Z = X + Y$. Determine a distribuição condicional de X dado que $Z = z$.

39. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição comum exponencial de parâmetro λ, e considere $Z = X + Y$. Obtenha a densidade condicional de X dado que $Z = z$.

40. Duas pessoas chegam simultaneamente a um ponto de ônibus. Suponha que o tempo que a pessoa i espera pela sua condução é uma variável aleatória $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, com T_1 e T_2 independentes. Sejam $X = \text{mín}\{T_1, T_2\}$ o tempo transcorrido até o primeiro passageiro tomar seu ônibus e $Y = \text{máx}\{T_1, T_2\}$ o tempo transcorrido até que ambas as pessoas tenham tomado a condução. Determine a distribuição de

(a) $X \mid Y = y$;

(b) $Y \mid X = x$;

(c) $(Y - X) \mid X = x$.

41. Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $\text{Exp}(1)$ e sejam Y_1, Y_2 e Y_3 as estatísticas de ordem associadas. Defina $Z_1 = Y_1$, $Z_2 = Y_2 - Y_1$ e $Z_3 = Y_3 - Y_2$.

(a) Encontre a densidade conjunta de Z_1, Z_2 e Z_3, bem como as marginais. São Z_1, Z_2 e Z_3 independentes?

(b) Determine a densidade condicional de Z_2 dado Y_1.

(c) Calcule a densidade e a esperança condicionais de Y_3 dado Y_1.

42. O número de clientes Y que chegam a um caixa eletrônico tem distribuição de Poisson com parâmetro X, sendo X a intensidade com que os clientes chegam ao caixa eletrônico. Supondo que X tem distribuição $\text{Gama}(\alpha, 1)$, encontre a função de probabilidade da variável aleatória Y.

Solução. Sabemos que X é uma variável aleatória com densidade

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x},\ x \geq 0.$$

Por outro lado,

$$P(Y = k \mid X = x) = \frac{e^{-x}\, x^k}{k!},\ k = 0, 1, \ldots$$

Logo, para $k = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(Y = k \mid X = x)\, f_X(x)\, dx \\ &= \frac{1}{k!\,\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{k+\alpha-1} e^{-2x}\, dx = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\,\Gamma(\alpha)\, 2^{k+\alpha}}. \end{aligned}$$

Note que, em particular, se $X \sim \text{Exp}(1)$, então

$$P(Y = k) = \frac{1}{2^{k+1}},\ k = 0, 1, \ldots$$

43. Usando o resultado do exercício anterior, prove que para $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} \frac{1}{2^k} = 2^n.$$

Sugestão: Tome $\alpha = n$ e use que $\sum_{k=1}^{\infty} k\, P(Y = k) = E(Y) = E(E(Y|X))$.

44. O número de *e-mails* que chegam a um servidor no intervalo de tempo $[0, t]$ é, para cada $t > 0$, uma variável aleatória N_t com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda\, t$. Somente um computador é conectado ao servidor para ler os *e-mails* recebidos. O tempo de vida T desse computador tem distribuição exponencial de parâmetro θ. Além disso, N_t e T são independentes para todo t. Obtenha a distribuição do número de *e-mails* lidos até o computador falhar.

Solução. Para $j = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} P(N_T = j) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(N_T = j \mid T = t)\, f_T(t)\, dt = \int_0^{\infty} P(N_T = j \mid T = t)\, \theta\, e^{-\theta t}\, dt \\ &\overset{(*)}{=} \int_0^{\infty} P(N_t = j \mid T = t)\, \theta\, e^{-\theta t}\, dt \overset{(**)}{=} \int_0^{\infty} P(N_t = j)\, \theta\, e^{-\theta t}\, dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}\, (\lambda t)^j}{j!}\, \theta\, e^{-\theta t}\, dt = \frac{\theta\, \lambda^j}{j!} \int_0^{\infty} t^j\, e^{-(\lambda+\theta)t}\, dt \\ &= \frac{\theta\, \lambda^j}{j!} \frac{\Gamma(j+1)}{(\lambda+\theta)^{j+1}} = \left(\frac{\theta}{\lambda+\theta}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta}\right)^j. \end{aligned}$$

A passagem $(*)$ é justificada pelo Princípio da substituição; $(**)$ decorre da independência de N_t e T para todo t.

45. Numa fábrica empacotam-se palitos de fósforo em caixas mediante uma máquina que não pode ser totalmente controlada. Para não perder clientes, a máquina se ajusta de forma que todas as caixas contenham pelo menos 50 palitos. O número de palitos em cada caixa é uma variável aleatória X com função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = (0,8)\,(0,2)^{x-50},\ x = 50, 51, \ldots$$

Ademais, o número de palitos defeituosos em uma caixa que contém x fósforos tem distribuição Binomial$(x, 1/10)$. Obtenha o número médio de palitos defeituosos em uma caixa.

Solução. Seja D o número de palitos defeituosos em uma caixa. Sabemos que D dado que $X = x$ tem distribuição Binomial$(x, 1/10)$, logo

$$E(D \,|\, X = x) = x/10.$$

Então, utilizando a propriedade fundamental da esperança condicional,

$$E(D) = E(E(D \,|\, X)) = E(X/10) = E(X)/10.$$

Para obter $E(X)$, observamos que a variável aleatória $Y = X - 49$ tem distribuição geométrica com parâmetro $0,8$, pois

$$P(Y = k) = P(X = k + 49) = (0,8)\,(0,2)^{k-1},\ k = 1, 2, \dots$$

Assim,

$$E(X) = E(Y) + 49 = \frac{1}{0,8} + 49 = 50,25$$

e portanto $E(D) = 5,025$.

46. Um inseto põe N ovos, onde N tem distribuição de Poisson com parâmetro λ. Cada ovo dá origem a um novo inseto com probabilidade p $(0 < p < 1)$, independentemente dos demais. Seja X o número de novos insetos produzidos.

(a) Qual a distribuição de X dado que $N = n$?

(b) Obtenha a distribuição de X.

(c) Qual o valor esperado de X?

47. O número de partidas de futebol jogadas em uma semana em uma vila é uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Os números de gols marcados em cada jogo são variáveis aleatórias i.i.d. com média ν e variância θ^2 e independentes do total de partidas jogadas. Seja X o número total de gols marcados em uma semana. Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Sugestão: Escreva $X = \sum_{j=1}^{Y} X_j$, onde X_j é o número de gols marcados no j-ésimo jogo e Y é o número de partidas jogadas numa semana. Use condicionamento em Y para obter $E(X)$ e $E(X^2)$.

48. Seja N uma variável aleatória com distribuição geométrica de parâmetro $p \in (0, 1)$, ou seja, N tem função de probabilidade dada por

$$P(N = n) = p\,q^{n-1},\ n = 1, 2, \dots,$$

onde $q = 1 - p$.

(a) Mostre que a função geradora de momentos de N é dada por

$$M(t) = \frac{p\,e^t}{1 - q\,e^t} = \frac{p}{e^{-t} - q},\ t < -\log q.$$

(b) Usando o item (a), prove que $E(N) = 1/p$.

Uma urna contém N bolas numeradas de 1 a N, onde N tem a distribuição dada anteriormente. Bolas são escolhidas ao acaso dessa urna, uma por vez, até que a bola com o número 1 seja selecionada. Suponha que as retiradas são feitas com reposição, isto é, cada bola escolhida é reposta na urna antes da próxima retirada. Seja X o número de retiradas feitas.

(c) Obtenha $P(X = x \mid N = n)$.

(d) Determine $E(X)$.

49. O número X de erros que uma digitadora comete por página é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro 2. Se uma página tem x erros, o número Y de minutos necessários para revisar e corrigir a página é uma variável aleatória com distribuição condicional

$$P(Y = y \mid X = x) = \begin{cases} 1/5 & \text{se} \quad y = x + 1, \\ 3/5 & \text{se} \quad y = x + 2, \\ 1/5 & \text{se} \quad y = x + 3. \end{cases}$$

(a) Encontre a probabilidade de que sejam necessários 3 minutos para revisar e corrigir uma página.

(b) Dado que foram usados 3 minutos na revisão e correção de uma página, qual a probabilidade de que seja uma página sem erros?

(c) Usando a função geradora de momentos, encontre a esperança de X.

(d) Determine $E(Y \mid X = x)$.

(e) Obtenha $E(Y)$.

50. Escolhe-se ao acaso um ponto (X, Y) no triângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$.

(a) Calcule $E(X|Y)$.

(b) Obtenha $E(Y|X)$ e $E(Y^2|X)$.

(c) Usando o item (b), determine $E((X - Y)^2|X)$.

51. Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que $E(X|Y) = Y$ e $E(Y|X) = X$. Prove que $P(X = Y) = 1$.

Sugestão: Mostre que $E((X - Y)^2) = 0$.

52. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{y}\,e^{-(y+x/y)},\ x > 0, y > 0.$$

(a) Determine a distribuição de Y.

(b) Obtenha a distribuição condicional de X dado que $Y = y$.

(c) Usando (a) e (b), calcule $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

53. Um dado honesto é lançado repetidamente, de modo independente. Sejam X e Y o número de lançamentos necessários para obter um 6 e um 5, respectivamente. Obtenha

(a) $E(X)$;

(b) $E(X \mid Y = 1)$;

(c) $E(X \mid Y = 5)$.

54. Uma urna contém a bolas brancas e b bolas pretas. Após uma bola ser retirada ao acaso, ela é devolvida à urna se é branca, mas se é preta então é substituída por uma bola branca de outra urna. Seja M_n o número esperado de bolas brancas na urna depois que a operação anterior foi repetida n vezes.

(a) Obtenha a equação recursiva

$$M_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) M_n + 1,\ n \geq 0.$$

(b) Use o item (a) para provar que

$$M_n = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^n,\ n \geq 0.$$

(c) Qual é a probabilidade de que a $(n+1)$-ésima bola retirada seja branca?

55. Um dado honesto é lançado repetidamente, de modo independente. Calcule o número esperado de lançamentos feitos até conseguir duas faces 6 consecutivas.

Sugestão: Condicione no tempo da primeira ocorrência de uma face diferente de 6.

56. Uma moeda com probabilidade p de cara em cada lançamento é lançada repetidamente, de modo independente. Seja T_r o número de lançamentos necessários para obter uma seqüência de r caras consecutivas.

(a) Determine $E(T_r \mid T_{r-1})$.

(b) Escreva $E(T_r)$ em termos de $E(T_{r-1})$.

(c) Quanto vale $E(T_1)$?

(d) Obtenha $E(T_r)$.

57. Uma caixa contém duas moedas: a moeda 1, com probabilidade de cara igual a $0,4$, e a moeda 2, com probabilidade de cara igual a $0,7$. Uma moeda é escolhida ao acaso da caixa e lançada dez vezes. Dado que dois dos três primeiros lançamentos resultaram em cara, qual a esperança condicional do número de caras nos dez lançamentos?

Sugestão: Defina A o evento de que dois dos três primeiros lançamentos resultam em cara e N_j o número de caras nos j lançamentos finais. Então, $E(N_{10}\,|\,A) = 2 + E(N_7\,|\,A)$. Para obter $E(N_7\,|\,A)$, condicione na moeda que foi usada.

58. Demonstre o tópico **3.3** (p. 61).

59. Obtenha a função geradora de momentos de $Y = X^2$, onde X tem distribuição $N(0,1)$. Conclua que a distribuição χ_1^2 é idêntica à Gama$(1/2, 1/2)$.

60. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro 1. Considere

$$V_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\} \quad \text{e} \quad W_n = X_1 + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{3} + \cdots + \frac{X_n}{n}.$$

Prove que V_n e W_n têm a mesma distribuição.

61. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(0,2)$. Definimos $Z = X + Y$ e $W = X - Y$. Calcule as funções geradoras de momentos de Z e W e mostre que Z e W são identicamente distribuídas mas não independentes.

62. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com densidade comum definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a função geradora de momentos da variável aleatória $Y = -\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log(1 - X_j)$ e daí conclua qual a sua distribuição.

63. Um aparelho de som é formado por n componentes, sendo que o i-ésimo componente tem probabilidade p_i de falhar. Suponha que os componentes falham de maneira independente e seja X o número de componentes que falham. Sabe-se que se $X = 0$ então o aparelho funciona, se $X = 1$ a probabilidade de funcionar é $0,7$ e se $X \geq 2$ o aparelho não funciona.

(a) Obtenha a função geradora de probabilidade de X em função das p_i's.

(b) Sendo $n = 4$, $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,05$, $p_3 = 0,15$ e $p_4 = 0,1$, calcule a probabilidade do aparelho funcionar.

64. (a) Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica de parâmetro p. Prove que para $n \geq 1$,

$$E\left(X\left(X-1\right)\ldots\left(X-n+1\right)\right) = \frac{n!\,(1-p)^{n-1}}{p^n}.$$

(b) Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro λ. Mostre que para $n \geq 1$,

$$E\,(X\,(X-1)\ldots(X-n+1)) = \lambda^n.$$

Sugestão: Use a propriedade (ii) da função geradora de probabilidade. Por exemplo, para o item (a), prove que para $n \geq 1$,

$$\frac{d^n G_X(s)}{ds^n} = \frac{n!\,p\,(1-p)^{n-1}}{(1-(1-p)s)^{n+1}},\ s < (1-p)^{-1}$$

e faça $s = 1$ para chegar ao resultado.

65. Seja X uma variável aleatória inteira e não-negativa, tal que

$$P(X=k) = \frac{\lambda}{k}\,P(X=k-1),$$

para todo $k \geq 1$, onde $\lambda > 0$ é uma constante. Determine a distribuição de X.

Solução. Sejam $p_k = P(X=k)$, $k \geq 0$ e

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\,s^k,\ s \in [-1,1]$$

a função geradora de probabilidade de X. Podemos diferenciar a série de potências em todo ponto s em que converge uniformemente. Usando a igualdade dada no enunciado do exercício, obtemos

$$\frac{d}{ds}\,G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,p_k\,s^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1}\,s^{k-1} = \lambda\,G_X(s).$$

Portanto,

$$\frac{d}{ds}\,(\log G_X(s)) = \lambda,$$

logo podemos escrever

$$G_X(s) = \exp\{\lambda\,s + K\},$$

onde K é uma constante. Visto que $G_X(1) = 1$, temos que $K = -\lambda$ e então

$$G_X(s) = \exp\{\lambda\,(s-1)\}.$$

Como a função geradora de probabilidade determina unicamente a distribuição, concluímos que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

66. Seja X uma variável aleatória não-negativa. Demonstre que

$$E(X) \leq (E(X^2))^{1/2} \leq (E(X^3))^{1/3} \leq \cdots$$

Sugestão: Use a desigualdade de Jensen para uma variável aleatória Y não-negativa e a função $\varphi(y) = y^{n/(n-1)}$ e depois faça $Y = X^{n-1}$.

67. (a) Seja Y uma variável aleatória não-negativa tal que $0 < E(Y^2) < \infty$. Prove que para $a < E(Y)$,

$$P(Y > a) \geq \frac{(E(Y) - a)^2}{E(Y^2)}.$$

(b) Seja X uma variável aleatória com esperança μ, variância σ^2 e tal que $0 < M = E(|X - \mu|^4) < \infty$. Mostre que para $0 < x < \sigma$,

$$P(|X - \mu| > x) \geq \frac{(\sigma^2 - x^2)^2}{M}.$$

Sugestão: (a) Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz com as variáveis aleatórias Y e $I_{\{Y>a\}}$.

68. Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. Mostre que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F_{X,Y}(x, y) \leq \sqrt{F_X(x)\, F_Y(y)}.$$

Sugestão: Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

69. Prove a desigualdade de Mill: Se $Z \sim N(0, 1)$ então para qualquer $x > 0$,

$$P(|Z| \geq x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$

Sugestão: Denotando por ϕ a densidade de Z, basta mostrar que para qualquer $x > 0$,

$$P(Z \geq x) \leq \frac{1}{x} \int_x^\infty y\, \phi(y)\, dy.$$

70. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição comum $N(0, 1)$. Definimos $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Utilize a desigualdade de Mill para obter um limitante superior para $P(|\bar{X}_n| \geq x)$, $x > 0$. Compare o limitante obtido com o limitante fornecido pela desigualdade de Chebyshev.

Respostas

1. (a)

x	-16	-7	2	11	20
$p_X(x)$	$1/12$	$1/6$	$13/36$	$2/9$	$1/6$

(b) $E(X) = 4$, $\text{Var}(X) = 108,5$

2.

x	-1	1	2	3
$p_X(x)$	$125/216$	$75/216$	$15/216$	$1/216$

$E(X) = -17/216$, Não

3. 7/2 (O número de tentativas tem distribuição uniforme discreta em $\{1, 2, \dots, 6\}$).

4. (a) $(1 - e^{-\lambda})/\lambda$ (b) e^{λ} (c) $e^{-\lambda}/(1-\lambda)$ se $0 < \lambda < 1$, ∞ se $\lambda \geq 1$
$X!$ é integrável para $0 < \lambda < 1$.

8. (a) $C = 1/9$

(b)

$X \setminus Y$	0	1	$p_X(x)$
0	2/9	1/9	1/3
1	2/9	4/9	2/3
$p_Y(y)$	4/9	5/9	1

X e Y não são independentes.

(c) $P(X = 0 \,|\, Y = 1) = 1/5$
(d) $E(2^X - 12\,Y + 6) = 1$
(e) $\mathrm{Var}(X + Y) = 50/81$

9. (b) 0, 1/6 (c) $(1-k)^2$ (d) $1/(6\,k^2)$

10. 1

11. 1/8

12. (a) Não (b) $f_Z(z) = (1/2)\,e^{-z}\,z^2, z \geq 0$ (c) 1/2

13. 1/2

14. $(1 + \rho)\,\sigma^2/2$

15. 1/36

16. (a) Exp(6) (b) 1/101

19. 8

20. 21/11

21. π

22. 155

23. $n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

24. 1, 14/15

25. 6/7, 156/245

26. $1 + 2(n-1)pq$, $2pq(2n - 3 - 2pq(3n-5))$ onde $q = 1 - p$.

27. $\dfrac{n\,R}{N}$, $n\Big(\dfrac{R}{N}\Big)\Big(1-\dfrac{R}{N}\Big)\Big(\dfrac{N-n}{N-1}\Big)$

28. $n(1-1/n)^r$, $n(1-1/n)^r[1-(1-1/n)^r]+n(n-1)[(1-2/n)^r-(1-1/n)^{2r}]$

29. $-m\,p_i\,p_j$

30. (a) Binomial$(n-1,p)$ (b) $1/(n-1)$

32. $E(X\,|\,Y)=(2/3)(1-Y^3)/(1-Y^2)$, $E(Y\,|\,X)=(2/3)\,X$

33. (a) Para $y>0$: $f_{X|Y}(x|y)=1/y, 0<x<y$ (b) $E(X^3|Y=y)=y^3/4$

34. (b) $P(Y\geq X/2)=1/2$ (c) $f_{X|Y}(x|1)=1/2, 1<x<3 \Rightarrow P(X\geq 2\,|\,Y=1)=1/2$

35. (a) $P(X>0,7)=0,216$ (b) $P(X<Y)=0,25$
(c) $Z=X+Y$, $f_Z(z)=3\,z^2, 0\leq z\leq 1$ (d) $P(Z\leq 0,8)=0,512$
(e) $f_{X|Z}(x|1)=2\,x, 0\leq x\leq 1 \Rightarrow P(X\geq 0,6\,|\,Z=1)=0,64$

36. Binomial$(z,\lambda/(\lambda+\mu))$

37. Hipergeométrica$(m+n,m,z)$

38. Uniforme Discreta$(z-1)$

39. Uniforme$(0,z)$

40. $f_{X,Y}(x,y)=2\,\lambda^2\,e^{-\lambda(x+y)}$, $0<x<y$
(a) Para $y>0$, $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{\lambda\,e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda y}}$, $0<x<y$
(b) Para $x>0$, $f_{Y|X}(y|x)=\lambda\,e^{-\lambda(y-x)}$, $y>x$
(c) $(Y-X)\,|\,X=x\sim \text{Exp}(\lambda)$

41. (a) $Z_1\sim\text{Exp}(3)$, $Z_2\sim\text{Exp}(2)$ e $Z_3\sim\text{Exp}(1)$, independentes
(b) $Z_2\,|\,Y_1\sim\text{Exp}(2)$ (decorre imediatamente de (a))
(c) Para $y_1>0$, $f_{Y_3|Y_1}(y_3|y_1)=2\,e^{2y_1-y_3}(e^{-y_1}-e^{-y_3})$, $y_3>y_1$ e $E(Y_3|Y_1)=3/2+Y_1$

46. (a) $X|N=n\sim\text{Bin}(n,p)$ (b) Poisson(λp) (c) λp

47. $E(X)=\nu\mu$ e $\text{Var}(X)=\mu\,\theta^2+\nu^2\,\sigma^2$

48. (c) Para $n\geq 1$: $P(X=x\,|\,N=n)=(1/n)(1-1/n)^{x-1}, x=1,2,\ldots$ (d) $1/p$

49. (a) $(9/5)\,e^{-2}$ (b) $1/9$ (c) 2 (d) $E(Y\,|\,X=x)=x+2$ (e) 4

50. (a) $E(X|Y) = \dfrac{Y+1}{2}$ (b) $E(Y|X) = \dfrac{X}{2}$; $E(Y^2|X) = \dfrac{X^2}{3}$

(c) $E((X-Y)^2|X) = \dfrac{X^2}{3}$

52. (a) $Y \sim \text{Exp}(1)$ (b) $X \mid Y = y \sim \text{Exp}(1/y)$ (c) 1

53. (a) 6 (b) 7 (c) 5,8192

54. (c) $M_n/(a+b)$

55. 42

56. (a) $1 + T_{r-1} + (1-p)\, E(T_r)$ (b) $E(T_r) = 1/p + (1/p)\, E(T_{r-1})$

(c) $\dfrac{1}{p}$ (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p^i} = \frac{1-p^r}{p^r\,(1-p)}$

57. $6,0705$

59. $M_Y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} f_X(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{1-2\,t}}$, $t < 1/2$

60. $M_{V_n}(t) = M_{W_n}(t) = \dfrac{n!\, \Gamma(1-t)}{\Gamma(n+1-t)} = \dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(i-t)}$, $t < 1$

61. $M_Z(t) = M_W(t) = e^{3t^2/2}, t \in \mathbb{R}$, portanto Z e W têm distribuição $N(0,3)$. Se fossem independentes, teríamos que $M_{Z+W}(t) = M_Z(t)\, M_W(t)$ para todo t.

62. $M_Y(t) = \left(\dfrac{2n}{2n-t}\right)^n$ para $t < 2n$, $Y \sim \text{Gama}(n, 2n)$

63. (a) $G_X(s) = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i + p_i s)\,, s \in \mathbb{R}$ (b) $0,860715$

Capítulo 5

Modos de Convergência e Teoremas Limites

1. Modos de Convergência

1.1. A tabela seguinte resume os três tipos de convergência abordados nesse livro, as ferramentas úteis no estudo de cada um deles e os principais teoremas limites relacionados.

Convergência	**Ferramenta**	**Teorema limite**
Em distribuição	Função geradora / característica	Teorema Central do Limite
Em probabilidade	Desigualdades de Markov / Chebyshev	Lei Fraca dos Grandes Números
Quase certa	Lema de Borel-Cantelli	Lei Forte dos Grandes Números

1.2. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X$ variáveis aleatórias em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Dizemos que

(a) X_n converge para X *quase certamente*, denotado por $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$, se o evento

$$\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega) \text{ quando } n \to \infty\}$$

tem probabilidade 1.

(b) X_n converge para X *em probabilidade*, denotado por $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, se para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

(c) X_n converge para X *em distribuição*, denotado por $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$, se

$$P(X_n \leq x) \to P(X \leq x) \text{ quando } n \to \infty,$$

para todo ponto x em que $F_X(x) = P(X \leq x)$ é contínua.

Observação. Note que a convergência em distribuição é definida em termos das funções de distribuição; a condição de que as variáveis aleatórias sejam definidas no mesmo espaço de probabilidade é supérflua. Outra terminologia para $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$ é dizer que F_{X_n} *converge fracamente* para F_X.

1.3. Fatos importantes:

1. $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X \implies X_n \xrightarrow{\text{P}} X \implies X_n \xrightarrow{\text{D}} X$.

   Nenhuma outra implicação vale em geral.

2. Se $X_n \xrightarrow{\text{D}} c$, onde c é uma constante, então $X_n \xrightarrow{\text{P}} c$.

3. Se $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $g(X_n) \xrightarrow{\text{q.c.}} g(X)$.

   Asserções análogas são válidas para $\xrightarrow{\text{P}}$ e $\xrightarrow{\text{D}}$.

1.4. Teorema da continuidade:

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias com funções geradoras de momentos correspondentes $\{M_n(t)\}_{n\geq 1}$, que existem para $|t| < b$. Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$ para $|t| \leq a < b$, onde $M(t)$ é a função geradora de momentos da variável aleatória X. Então, $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$.

1.5. (a) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ e X variáveis aleatórias inteiras e não-negativas. Então,

$$X_n \xrightarrow{\text{D}} X \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k) \text{ para todo } k = 0, 1, \ldots$$

No caso geral de variáveis aleatórias discretas assumindo valores em $\{x_0, x_1, \ldots\}$, vale a implicação $\Longleftarrow$ com x_k no lugar de k.

(b) **Teorema de Scheffé:** Sejam $X_1, X_2, \ldots$ e X variáveis aleatórias contínuas, com densidades respectivas $f_1, f_2, \ldots$ e f. Se $f_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ para quase todo x, então $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$.

A condição de que $f_n(x) \to f(x)$ para quase todo x significa que o conjunto $\{x : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$ tem medida de Lebesgue nula, o que ocorre, por exemplo, se esse conjunto é finito ou enumerável. A recíproca do Teorema de Scheffé é falsa.

2. Teoremas Limites

2.1. Lei Fraca dos Grandes Números de Khintchine (1929):

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com média finita μ. As somas parciais $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{P}} \mu.$$

2.2. Lei Fraca dos Grandes Números de Bernoulli (1713):

Consideremos uma seqüência de ensaios de Bernoulli independentes, tendo a mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio. Se S_n é o número de sucessos nos n primeiros ensaios, então

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{P}} p.$$

2.3. Lei Fraca dos Grandes Números de Chebyshev (1867):

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma seqüência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Se $\lim_{n\to\infty} \text{Var}(S_n)/n^2 = 0$, então

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{P}} 0. \tag{$\star$}$$

Em particular, $(\star)$ é válida se $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias não-correlacionadas que tenham variâncias finitas e uniformemente limitadas.

2.4. Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov (1933):

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com média finita μ. As somas parciais $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} \mu.$$

2.5. Lei Forte dos Grandes Números de Borel (1909):

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. tal que $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = 0) = 1 - p$. Então,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} p,$$

onde $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

2.6. Teorema Central do Limite (Liapunov (1901), Lindeberg (1922)):

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com média finita μ e variância σ^2 finita e positiva, e seja $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Então,

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{D}} N(0, 1).$$

Isto é, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\, dx.$$

2.7. Teorema Central do Limite de De Moivre (1733) e Laplace (1812):

Seja S_n o número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes, tendo a mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio, onde $0 < p < 1$. Então,

$$\frac{S_n - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} \xrightarrow{\text{D}} N(0,1).$$

2.8. Limite de binomiais para Poisson:

Se $X_n \sim \text{Binomial}(n,\, p_n)$, $n \geq 1$, e $\lim\limits_{n\to\infty} n\,p_n = \lambda > 0$, então

$$X_n \xrightarrow{\text{D}} \text{Poisson}(\lambda).$$

Observação. Tendo em vista o tópico **1.5** (a), no lugar da convergência em distribuição podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!},\ \forall\, k = 0, 1, \ldots$$

(Teorema de Poisson (1832)).

3. Outros Teoremas Limites

3.1. Uma Lei Forte sem supor distribuições idênticas (Kolmogorov (1933)):

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e integráveis, e consideremos $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n)/n^2 < \infty$, então

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} 0.$$

3.2. Um Teorema Central do Limite sem supor distribuições idênticas*:

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, e seja $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Para cada i, sejam $\mu_i = E(X_i)$ e $\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$, e denotemos por $m_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i$ e $s_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ a média e a variância de S_n, respectivamente.

Suponhamos que: (a) $s_n^2 \to \infty$ quando $n \to \infty$, e (b) existe uma constante M tal que $P(|X_i| \leq M) = 1$ para todo i.

*Essa versão segue de um Teorema Central do Limite mais geral que foi provado por J. W. Lindeberg (1922). Para mais detalhes, veja-se o livro de Feller [2] (p. 254).

Então,

$$\frac{S_n - m_n}{s_n} \xrightarrow{\text{D}} N(0,1).$$

Isto é, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - m_n}{s_n} \le a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\, dx.$$

4. Teoremas auxiliares

4.1. Teorema de Slutsky (1925): Se $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{D}} c$, onde c é uma constante, então

(a) $X_n \pm Y_n \xrightarrow{\text{D}} X \pm c$,

(b) $X_n Y_n \xrightarrow{\text{D}} cX$,

(c) $X_n/Y_n \xrightarrow{\text{D}} X/c$ se $c \neq 0$.

4.2. Método Delta: Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias tais que $\sqrt{n}\,(Y_n - \mu) \xrightarrow{\text{D}} N(0,\sigma^2)$, onde μ e $\sigma^2 > 0$ são constantes. Se g é uma função derivável no ponto μ, então

$$\sqrt{n}\,(g(Y_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\text{D}} N(0, (g'(\mu))^2\, \sigma^2),$$

onde, no caso de $g'(\mu) = 0$, interpretamos a distribuição $N(0,0)$ como a massa pontual em 0.

Exercícios

1. Seja $\{X_n\}_{n\ge 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias tal que cada X_n assume valores em $\{0, 1/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ com $P(X_n = j/n) = 1/(n+1)$ para $j = 0, \ldots, n$. Mostre que $X_n \xrightarrow{\text{D}} U(0,1)$.

Solução. Seja $X \sim U(0,1)$, logo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ x & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

Para $n \ge 1$,

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ k/(n+1) & \text{se } (k-1)/n \le x < k/n,\ k = 1, \ldots, n, \\ 1 & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

Para $x < 0$ ou $x \geq 1$, temos que $F_{X_n}(x) = F_X(x)$, portanto

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x). \tag{$*$}$$

Se $0 \leq x < 1$, então $F_{X_n}(x) = k/(n+1)$ onde $k \in \{1, \ldots, n\}$ é tal que $(k-1)/n \leq x < k/n$. Como $F_X(x) = x$, temos

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{k}{n+1} - \frac{k}{n} \leq F_{X_n}(x) - F_X(x) \leq \frac{k}{n+1} - \frac{k-1}{n} \leq \frac{1}{n+1}$$

e então também vale $(*)$. Assim, $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$.

2. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias, sendo a densidade de X_n dada por

$$f_{X_n}(x) = \frac{n\,x^{n-1}}{\theta^n},\ 0 < x < \theta.$$

Prove que $X_n \xrightarrow{\text{D}} \theta$.

3. Suponha que $X_n \sim N(0, 1/n)$, $n \geq 1$. Prove que $X_n \xrightarrow{\text{D}} X \equiv 0$.

4. Forneça um exemplo no qual $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$, $Y_n \xrightarrow{\text{D}} Y$, porém a soma $X_n + Y_n$ não converge em distribuição para $X + Y$.

5. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias tal que X_n tem função de distribuição

$$F_n(x) = x - \frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{2n\pi},\ 0 \leq x \leq 1.$$

(a) Mostre que X_n tem densidade e então conclua que de fato F_n é uma função de distribuição.

(b) Prove que $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$ onde $X \sim U[0,1]$, mas a densidade de X_n não converge para a densidade de X no intervalo $(0,1)$.

6. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias tal que $X_n \sim \text{Binomial}(n, 1/n^2)$. Demonstre que $X_n - 1/n \xrightarrow{\text{P}} 0$.

Solução. Observamos que $E(X_n) = 1/n$ e $\text{Var}(X_n) = (1/n)\,(1 - 1/n^2)$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, temos, pela desigualdade de Chebyshev,

$$P\left(\left|X_n - \frac{1}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\,\varepsilon^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Assim, $X_n - 1/n \xrightarrow{\text{P}} 0$.

7. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias tais que

$$P(X_n = n) = 1 - P(X_n = 1/n) = 1/n^2.$$

Mostre que $X_n \xrightarrow{\text{P}} 0$.

8. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $[0,1]$. Definimos

$$Y_n = \text{mín}\{X_1,\ldots,X_n\}, Z_n = \text{máx}\{X_1,\ldots,X_n\}, U_n = n\,Y_n \text{ e } V_n = n\,(1-Z_n),\ n\geq 1.$$

Mostre que

(a) $Y_n \xrightarrow{\text{P}} 0$ e $Z_n \xrightarrow{\text{P}} 1$.

(b) $U_n \xrightarrow{\text{D}} W$ e $V_n \xrightarrow{\text{D}} W$, onde $W \sim \text{Exp}(1)$.

9. Seja X uma variável aleatória assumindo os valores 1 e -1 com probabilidade $1/2$ e suponha que $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes de X tais que

$$P(Y_n=1) = 1 - P(Y_n=0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Definimos a seqüência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ por

$$X_n = \begin{cases} X & \text{se } Y_n = 1, \\ e^n & \text{se } Y_n = 0. \end{cases}$$

Responda se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta.

(a) $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$.

(b) $\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|) = 0$.

10. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias com $E(X_n^2) < \infty$ para todo $n \geq 1$. Prove que se $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = \alpha$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \text{Var}(X_n) = 0$, então $X_n \xrightarrow{\text{P}} \alpha$.

11. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $N(0,\sigma^2)$. Fixado um número real α, definimos a seqüência $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ pela fórmula

$$Y_1 = X_1, \quad Y_n = \alpha\,Y_{n-1} + X_n,\ n\geq 2.$$

(a) Mostre que $Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i\, X_{n-i}$, $n \geq 1$.

(b) Obtenha a função geradora de momentos de Y_n e a sua distribuição.

(c) Calcule $\text{Cov}(Y_m, Y_n)$, $1 \leq m \leq n$.

(d) Prove que se $|\alpha| < 1$, então

$$Y_n \xrightarrow{\text{D}} N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right).$$

12. Suponha que $X_n \sim \text{Geométrica}(1/n)$, $n \geq 2$, e seja $Y_n = X_n/n - 1$. Prove que $Y_n \xrightarrow{\text{D}} Y$ onde $Y \sim \text{Exp}(1)$.

13. Uma marca de chocolate faz uma promoção: alguns dos pacotes incluem vales que podem ser trocados por uma camiseta. O número de pacotes premiados que se vendem ao dia em uma loja é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro 0,3. Estime a probabilidade de que em 120 dias se vendam nessa loja mais de 30 pacotes com prêmio.

Solução. Para $1 \leq i \leq 120$, seja X_i o número de pacotes premiados vendidos na loja no dia i. Sabemos que $X_1, \ldots, X_{120}$ têm distribuição de Poisson$(0,3)$, logo

$$\mu = E(X_1) = 0,3 \ \text{ e } \ \sigma^2 = \text{Var}(X_1) = 0,3.$$

Supomos que $X_1, \ldots, X_{120}$ são independentes, e seja $S_{120} = \sum_{i=1}^{120} X_i$ o total de pacotes premiados vendidos na loja durante os 120 dias.

Pelo Teorema Central do Limite,

$$\begin{aligned} P(S_{120} > 30) &= P\left(\frac{S_{120} - 120\,.\,0,3}{\sqrt{0,3}\,.\,\sqrt{120}} > \frac{30 - 120\,.\,0,3}{\sqrt{0,3}\,.\,\sqrt{120}}\right) \\ &\approx P(Z > -1) \approx 0,8413, \end{aligned}$$

onde $Z \sim N(0,1)$.

14. O número médio de canetas que se vendem diariamente em uma papelaria é 30, sendo a variância 10. Estes valores são 20 e 12 para o número de cadernos vendidos. Sabe-se, ademais, que a covariância entre as vendas diárias de ambos produtos é 9. Estime a probabilidade de que o número total de ambos produtos vendidos durante 90 dias esteja compreendido entre 4400 e 4600.

15. Uma máquina empacota lotes de parafusos. O dono da máquina deseja que pelo menos 90% dos lotes tenham mais de 1000 parafusos sem defeito. Sabendo que a probabilidade de que um parafuso seja defeituoso é $0,02$, qual o menor número de parafusos que deve colocar por lote?

16. Três emissoras de televisão têm uma árdua competição para obter altos níveis de audiência. O número médio diário de prêmios milionários distribuídos por cada uma dessas emissoras é de 5, 3 e 4, sendo $0,5$, $0,4$ e $0,3$ os desvios padrões, respectivamente. Estime a probabilidade de que o número total de prêmios milionários distribuídos em dois meses seja superior a 730.

17. O salário em reais dos funcionários de uma empresa tem distribuição de Pareto, com densidade

$$f(x) = \frac{5\ 700^{5/2}}{2\,x^{7/2}},\ x \geq 700.$$

Qual a probabilidade de que o salário médio de um grupo de 1000 funcionários seja maior que 1200 reais?

18. Um dado honesto é lançado infinitas vezes independentemente. Seja X_i o resultado do i-ésimo lançamento, e considere $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Obtenha

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n > 3n)$;

(b) um valor aproximado para $P(S_{100} > 320)$.

19. Uma moeda honesta é lançada independentemente, até se obterem 450 caras. Estime a probabilidade de que no máximo 960 lançamentos sejam feitos.

Sugestão: Seja N o número de lançamentos necessários para obter 450 caras. Há duas abordagens:

(i) Escrever N como a soma de 450 variáveis aleatórias independentes com distribuição geométrica de parâmetro 1/2.

(ii) Supor que a seqüência de lançamentos da moeda é infinita e usar que $\{N \le 960\} = \{\sum_{i=1}^{960} X_i \ge 450\}$, onde X_i é a função indicadora de que ocorre cara no i-ésimo lançamento.

20. Considere um experimento que consiste em lançamentos independentes e sucessivos de um dado honesto. Se o resultado é 1, 2 ou 3, anotamos em uma folha de papel o número 1, se a face do dado é igual a 4, anotamos o número 2, e se é igual a 5 ou 6, anotamos o número 3. Seja N o número de lançamentos necessários para que o produto dos números anotados ultrapasse 100000. Estime a probabilidade de que $N \ge 25$.

21. Usando o Teorema Central do Limite para variáveis aleatórias com distribuição de Poisson, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}.$$

22. Sejam $\{X_n\}_{n\ge1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que $E(g(X_1)) = \xi$ e $\mathrm{Var}(g(X_1)) = \nu^2$, $0 < \nu^2 < \infty$. Além disso, suponha que T_n é uma função $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ (uma estatística) que satisfaz

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} g(X_i) + R_n,$$

onde $R_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\text{P}} 0$. Prove que

$$\frac{T_n - n\,\xi}{\sqrt{n}\,\nu} \xrightarrow{\text{D}} N(0,1).$$

23. Seja $\{X_n\}_{n\ge1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $[0, 2\theta]$, onde $\theta > 0$. Definimos $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Demonstre que

$$\sqrt{n}\left(\log \bar{X}_n - \log\theta\right) \xrightarrow{\text{D}} N(0, 1/3).$$

24. Uma moeda honesta é lançada infinitas vezes independentemente. Sejam $X_1, X_2, \dots$ as variáveis aleatórias definidas por

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{-ésimo e o } (i+1)\text{-ésimo lançamentos resultam em cara,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Obtenha $E(X_i)$ e $\operatorname{Var}(X_i)$.

(b) Mostre que

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} 1/16 & \text{se } j = i+1, \\ 0 & \text{se } j > i+1. \end{cases}$$

(c) Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$. Determine $E(S_n)$ e $\operatorname{Var}(S_n)$.

(d) Prove que $S_n/n \xrightarrow{\text{P}} 1/4$.

25. Considere uma seqüência infinita de lançamentos independentes de uma moeda, com probabilidade p de cara em cada lançamento $(0 < p < 1)$. Uma *seguida* é uma seqüência de lançamentos de mesmo resultado. Seja R_n o número de seguidas nos n primeiros lançamentos. Demonstre que

$$\frac{R_n}{n} \xrightarrow{\text{P}} 2\,p\,(1-p).$$

Sugestão: Vejam-se os exercícios 26 do Capítulo 4 e 10 do Capítulo 5.

26. Suponha que distribuímos r bolas distintas aleatoriamente em n urnas. Seja N_n o número de urnas vazias após a distribuição. Prove que se $r, n \to \infty$ de forma que $r/n \to c$, então

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{\text{P}} e^{-c}.$$

Sugestão: Vejam-se os exercícios 28 do Capítulo 4 e 10 do Capítulo 5.

27. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $(0,1)$. Definimos a média geométrica de $X_1, \dots, X_n$ por

$$Y_n = \Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{1/n}.$$

Mostre que a seqüência $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ converge q.c. para uma constante e encontre o valor dessa constante.

Solução. Seja $Z_i = \log X_i$, $i \geq 1$. Então, $Z_1, Z_2, \dots$ são variáveis aleatórias i.i.d. (já que as X_i's o são), com

$$E(Z_1) = \int_0^1 \log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (x\log x - x)\Big|_\varepsilon^1 = -1.$$

Pela Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov,

$$\log Y_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} -1.$$

Portanto, como a função $x \mapsto e^x$ é contínua,

$$Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} e^{-1}.$$

28. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $[0,\pi]$. Encontre constantes A e B tais que

$$\operatorname{sen}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] \xrightarrow{\text{q.c.}} A \quad \text{e} \quad \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{sen} X_i}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} B.$$

29. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $N(0,1)$. Definimos a seqüência $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ por

$$Y_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{(X_1-1)^2 + \cdots + (X_n-1)^2}.$$

Prove que $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 1/2$.

Sugestão: Use duas vezes a Lei Forte dos Grandes Números.

30. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média μ e variância σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$. Definimos

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \text{Média amostral} \quad \text{e}$$

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1} = \text{Variância amostral.}$$

(a) Determine $E(\bar{X}_n)$ e $\operatorname{Var}(\bar{X}_n)$.

(b) Mostre que

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\left(\bar{X}_n\right)^2}{n-1}.$$

(c) Obtenha $E(S_n^2)$.

(d) Prove que $S_n^2 \xrightarrow{\text{q.c.}} \sigma^2$.

Sugestão: (d) Use duas vezes a Lei Forte dos Grandes Números.

31. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes tal que

$$P(X_n = n^\alpha) = P(X_n = -n^\alpha) = \frac{1}{2}$$

para algum $\alpha \in (0, 1/2)$. Mostre que $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$.

Sugestão: Use a Lei Forte dos Grandes Números enunciada em **3.1**.

32. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes tal que

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2\,n},\ P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n},\ n \geq 1.$$

Considere $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e demonstre que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 \quad \text{e} \quad \frac{S_n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\text{D}} N(0,1).$$

Sugestão: Use os tópicos **3.1**, **3.2**, o Teorema de Slutsky e o fato de que $\sum_{i=1}^{n} 1/i \sim \log n$ quando $n \to \infty$.

Respostas

9. (a) Verdadeira (Para qualquer $\varepsilon > 0$, $\{|X_n - X| > \varepsilon\} \subset \{Y_n = 0\}$).
(b) Falsa ($\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|) = \lim_{n\to\infty} e^n/n = \infty$).

11. (a) Prove por indução em n. (b) $N\left(0, \sigma^2 \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{2i}\right)$ (c) $\sigma^2\,\alpha^{n-m} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^{2i}$
(d) Use o Teorema da Continuidade.

12. Use o Teorema da Continuidade.

14. $0,904$

15. 1027

16. $0,0339$

17. $0,1562$

18. (a) 1 (b) $0,96$

19. $0,97$

20. $0,494$

22. Utilize o Teorema Central do Limite para a seqüência $\{g(X_i)\}_{i\geq 1}$ e o Teorema de Slutsky.

23. Método Delta.

24. (a) $1/4$, $3/16$ (c) $n/4$, $(5n-2)/16$ (d) Use a Desigualdade de Chebyshev.

28. $A = 1$ e $B = 2/\pi$

30. (a) $E(\bar{X}_n) = \mu$ e $\text{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$ (c) $E(S_n^2) = \sigma^2$

Distribuição Normal Padrão

Função tabelada: $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,dx$ para $z \geq 0$.

	Segunda decimal de z										
Parte inteira e primeira decimal de z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,998	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,999	0,999	3,0
3,1	0,999	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,7
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,8
3,9	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	3,9

Referências Bibliográficas

[1] DANTAS, C. A. B. *Probabilidade: um curso introdutório.* 3. ed. São Paulo: EDUSP, 2004.

[2] FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications, Volume I.* 3rd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1968.

[3] GRIMMETT, G. R.; STIRZAKER, D. R. *Probability and random processes.* 3rd. ed. New York: Oxford University Press, 2001.

[4] GUT, A. *Probability: a graduate course.* New York: Springer, 2005.

[5] HOEL, P. G.; PORT, S. C.; STONE, C. J. *Introduction to probability theory.* Boston: Houghton Mifflin, 1971.

[6] JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário.* 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004 (Projeto Euclides).

[7] ROSS, S. M. *A first course in probability.* 7th. ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice Hall, 2005.