# Lista 2 - Probabilidade

## Medidas e Probabilidade

## $\pi$-sistemas e $\lambda$-sistemas

**1 —** (Uma condição insuficiente) Deixe $\Omega = \{1,2,3,4\}$, e deixe $A = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$.

a) Mostre que a $\sigma$-algebra $\mathcal{F}$ gerada por $A$ é o conjunto das partes $2^{\Omega}$.

b) Mostre que existem duas medidas de probabilidade $P_1$ e $P_2$ em $(\Omega, \mathcal{F})$, tal que $P_1(E) = P_2(E)$ para qualquer $E \in A$, mas $P_1 \neq P_2$. Este problema mostra que o fato de que duas medidas de probabilidade coincidem com uma família geradora de uma $\sigma$-álgebra não garante que elas sejam iguais. No entanto, isso é verdade se adicionarmos a suposição de que a família geradora A é fechada sob interseções finitas.

**2 —** Sejam $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ medidas de probabilidade em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$.

a) Suponha que $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}_1(A) \leq 1/2$, e mostre que $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$;

b) Encontre um exemplo onde $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}_1(A) < 1/2$, mas que $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$.

**3 —** Mostre que a condição "(C) *Se* $A \in \mathcal{L}$, *então* $A^c \in \mathcal{L}$" pode ser substituida pela condição "(C') *Se* $A, B \in \mathcal{L}$, *então* $B \backslash A \in \mathcal{L}$" na definição de um $\lambda$-sistema $\mathcal{L}$.

**4 —** Mostre que um $\lambda$-sistema $\mathcal{L}$ satisfaz as seguintes condições:

(UD) Se $A, B \in \mathcal{L}$ e $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup B \in \mathcal{L}$;

(LC) Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L}$ e $A_n \uparrow A$, então $A \in \mathcal{L}$;

(LD) Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L}$ e $A_n \downarrow A$, então $A \in \mathcal{L}$;

**5 —** Mostre que $\mathcal{L}$ é um $\lambda$-sistema de subconjuntos de $\Omega$ se, e só se, $\Omega \in \mathcal{L}$ e $\mathcal{L}$ satisfaz as condições (C') e (LC) nos exercícios anteriores.

# Números Normais de Borel

Para os exercícios a seguir, considere as seguintes definições.
Para todo número $\omega \in (0,1]$, deixe $d_k(\omega)$ denotar o $k$-ésimo digito da representação de $\omega$.
Seja $z_k(\omega) := 2d_k(\omega) - 1$ e

$$s_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} z_k(\omega) \equiv \text{ excesso de 1s nos n primeiros dígitos.}$$

Defina o conjunto dos *números normais de Borel* por

$$N := \left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \frac{s_n(\omega)}{n} = 0\right\}$$

**6 —** O conjunto de números normais e anormais está em $\mathcal{B}((0,1])$.

**7 —** a) Mostre que

$$M(t) := \int_0^1 e^{ts_n(\omega)}\, d\omega = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n \tag{1}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) Diferenciando com respeito à $t$, mostre que $\int_0^1 s_n(\omega)\, d\omega = M'(0) = 0$ e $\int_0^1 s_n^2(\omega)\, d\omega = M''(0) = n$.
A ideia é dividir a integral $\int_0^1$ nos intervalos diádicos da forma $(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$

**8 —** Mostre que

$$P\left[|s_n/n| \geq \epsilon\right] \leq 2e^{-n\epsilon^2/2}$$

para todo $\epsilon > 0$.
Dica : Use (1) e a desigualdade $(e^x + e^{-x})/2 \leq \exp(x^2/2)$ que é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$.

# Probabilidade - mais revisão e modelagem

**9 —** **(sub-additividade enumerável)** Mostre que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

**10 —** Prove que a continuidade da medida de probabilidade. Dados $A_1, A_2, \dots$ eventos, então

a) Se $A_n \nearrow A$, então $\mathbb{P}(A_n) \nearrow \mathbb{P}(A)$ quando $n \to \infty$.

b) Se $A_n \searrow A$, então $\mathbb{P}(A_n) \searrow \mathbb{P}(A)$ quando $n \to \infty$.

c) $\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup A_n)$.

d) $A_n \to A$ implica que $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$ as $n \to \infty$.

**11 —** Considere um modelo probabilístico cujo espaço amostral é a reta real. Mostre que

a) $\mathbb{P}\left([0, \infty)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left([0, n]\right)$

b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left([n, \infty)\right) = 0$.

**12 — Desigualdade de Bonferroni**

Definindo

$$S_1 := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i),$$

e

$$S_2 := \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j),$$

bem como

$$S_k := \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

para todos os números inteiros de $k$ em $\{3, \dots, n\}$.

Então, para $k$ ímpar

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j$$

e para $k > 2$ par

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j.$$

(Se tiver com muita preguiça prove apenas para $k = 2, 3$.)

Para cada um dos exercícios abaixo construa um espaço de probabilidade adequado para modelar o problema proposto, e faça o que se pede.

**13 — Problema do Pareamento**
No final de um dia agitado, os pais chegam ao jardim de infância para pegar seus filhos. Cada pai escolhe uma criança para levar a casa uniformemente ao acaso. Use o fórmula de inclusão-exclusão para mostrar que a probabilidade de pelo menos um pai escolhe seu próprio filho é igual a

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

E que essa probabilidade converge a $1 - 1/e$ quando $n \to \infty$

**14 —** Qual é a probabilidade de que um ponto escolhido aleatoriamente no interior de um triângulo equilátero esteja mais perto do centro do que de suas bordas?

**15 — Agulhas de Buffon**
Deixe um plano horizontal ser dividido em faixa por uma série de linhas paralelas a distância fixa $d$, como as tábuas do chão.
Deixe uma agulha, cujo comprimento seja igual à distância entre as linhas paralelas, ser jogada no plano aleatoriamente.

a) Defina precisamente o espaço de Probabilidade.
b) Prove que a probabilidade da agulha não interceptar uma das linhas paralelas é $\frac{2}{\pi}$.