Lista 3 - Probabilidade

Independência

1 — Faça $\Omega = \{1, 2, \ldots, 9\}$ e defina $\mathbb{P}$ em $(\Omega, 2^{\Omega})$ tal que $\mathbb{P}(\{k\}) = 1/9$ para cada $k \in \Omega$. Mostre que os eventos $\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}$ são dois a dois independentes, mas a família não é independente.

2 — Construa um exemplo de três eventos A, B, C não independentes, mas tais que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

3 — Dado uma família finita $\{A_i; i = 1, \ldots, n\}$ de eventos independentes, mostre que a família $\{B_i; 1 = 1, \ldots, n\}$, onde cada B_i ou é igual a A_i ou A_i^c, também é independente.

4 —

a) Para todo $k = 1, \ldots, n$ deixe $\mathcal{P}_k$ ser uma partição de Ω em conjuntos enumeráveis de $\mathcal{F}$. Mostre que as σ-álgebras $\sigma\langle\mathcal{P}_1\rangle, \ldots, \sigma\langle\mathcal{P}_n\rangle$ são independentes se e somente se (1) vale para cada escolha de A_k em $\mathcal{P}_k$ $k = 1, \ldots, n$.

b) Mostre que os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ são independentes se e somente se

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)$$

para toda escolha de B_k como A_k ou A_k^c para $k = 1, \ldots, n$.

5 — Deixe $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ serem π-sistemas de conjuntos em $\mathcal{F}$ tais que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \tag{1}$$

para toda escolha de $A_k \in \mathcal{A}_k$ para $k = 1, \ldots, n$.

a) Mostre usando um exemplo simples que $\mathcal{A}_k$'s não precisam ser independentes.

b) Mostre que $\mathcal{A}_k$'s serão independentes se para todo k, Ω é união enumerável de conjuntos em $\mathcal{A}_k$. Dica: Inclusão- Exclusão

6 — Dados $A_1, A_2, \ldots$. Mostre que $\mathbb{P}(A_n \;\; \textit{i.v.}) = 1$ se e somente se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|A)$ diverge para todo A de probabilidade não nula

Dica: Mostre que $\mathbb{P}(A_n \;\; \textit{i.v.}) < 1 \iff \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|A) < \infty$ para algum conjunto A com $\mathbb{P}(A) > 0$.

7 — Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com Ω enumerável, faço o que se pede.

a) Mostre que não existe sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ independentes tal que $\mathbb{P}(A_i) = 1/2$ para cada $i \geq 1$;

b) Dado $0 \leq p_n \leq 1$, faça $\alpha_n = \min\{p_n, 1 - p_n\}$. Mostre que se $\sum_n \alpha_n$ diverge, então não existe sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ independentes tal que $\mathbb{P}(A_n) = p_n$ para cada $n \geq 1$.

8 — Seja $\Omega = \{0, 1\}^\infty$, $\mathcal{F}$ a σ-álgebra produto em Ω. Para cada $n \geq 1$, defina

$$H_n = \{(\omega_k)_{k\geq 1} \in \Omega : \omega_n = 1\},$$

tome $\mathbb{P}$ a medida produto de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\mathbb{P}(H_n) = p$, com $0 < p < 1$, e faça o que se pede.

a) Mostre que $H_1, H_2, \ldots$ são eventos independentes;

b) Mostre que para qualquer função $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_{n+\theta(n)} \;\; \textit{i.v.})$ é igual à 0 ou 1;

c) Calcule $\mathbb{P}(H_{n+1} \cap H_{n+2} \cap \cdots \cap H_{n+9} \;\; \textit{i.v.})$;

d) Calcule $\mathbb{P}(H_{n+1} \cap H_{n+2} \cap \cdots \cap H_{2n} \;\; \textit{i.v.})$;

e) Calcule $\mathbb{P}(H_{n+1} \cap H_{n+2} \cap \cdots \cap H_{n+\lfloor \log_{1/p} n \rfloor} \;\; \textit{i.v.})$.

f) Calcule $\mathbb{P}(H_{n+1} \cap H_{n+2} \cap \cdots \cap H_{n+\lfloor (1+\epsilon) \log_{1/p} n \rfloor} \;\; \textit{i.v.}),\;\; \epsilon > 0$;

9 — Seja $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ uma sequência de eventos independentes e para $x \in \mathbb{R}$ faça

$$S_x = \left\{ \omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{A_k}(\omega) \leq x \right\}.$$

Mostre que $\mathbb{P}(S_x) = 0$ ou 1.

10 — Seja $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ uma sequência de eventos independentes. Mostre que se uma v.s. Y é mensurável com respeito à $\sigma(A_n, A_{n+1}, \ldots)$ para todo $n \geq 1$, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(Y = a) = 1$.

11 — Uma bolsa contém uma bola preta e m bolas brancas. Uma bola é retirada aleatoriamente. Se ela for preta, ele é retornada para o saco. Se for branca, ela e uma bola branca adicional são devolvidas à bolsa. Deixe A_n indicar o evento em que a bola negra não é retirada nas primeiras n tentativas . Discuta a reciproca do Lema de Borel-Cantelli com referência aos eventos A_n.

12 — Dados A_n, $n \geq 1$, conjuntos de Borel no espaço de Lebesgue $([0, 1], \mathcal{F}(0, 1), \mu)$. Mostre que se existe $Y > 0$, tal que $\mu(A_n) \geq Y$ para todo n, então existe pelo menos um ponto que pertence a infinitos conjuntos A_n