Lista 4 - Probabilidade

Distribuição e Esperança de Variáveis Aleatórias

Distribuição

1 — Dado X uma variável aleatória tal que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{P}(X > \delta) > 0$.

2 — Amostragem de uma variável aleatória exponencial
Encontre um algoritmo para produzir uma variável aleatória com distribuição $\mathrm{Exp}(\lambda)$ usando um gerador de números aleatórios que produz números aleatórios uniformes em $(0, 1)$. Em outras palavras, se $U \sim$ Uniforme$(0, 1)$, encontre uma função $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ tal que o aleatório variável $X = g(U)$ tem distribuição $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

3 — Perda de Memória - Distribuições Discretas
Uma v.a. discreta assumindo valores em $\mathbb{N}$ apresenta *perda de memória* se para todo $k, m \in]\mathbb{N}$, vale que

$$\mathbb{P}(X > k + m | X \geq m) = \mathbb{P}(X > k).$$

Mostre que se X apresenta perda de memória, então X tem distribuição Geométrica.

4 — Perda de Memória - Distribuições Contínuas
Dizemos que uma variável não negativa $X \geq 0$ tem a propriedade de perda de memória se $\mathbb{P}(X \geq t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t \geq s)$ para todo $0 < s < t$.

a) Mostre que as variáveis aleatórias exponenciais têm a propriedade da falta de memória;

b) Prove que qualquer variável aleatória não-negativa que tenha a propriedade falta de memória tenha distribuição exponencial para algum parâmetro $\lambda > 0$.
(Isso é mais fácil se você assumir que a função $G(x) = \mathbb{P}(X \geq x)$ é diferenciável em $[0, \infty)$, assim você pode fazer essa suposição se você não conseguir um argumento mais geral).

5 — Dado uma variável aleatória X que é independente de si própria, mostre que X é constante com probabilidade 1.

6 — Considere duas funções mensuráveis $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prove que se X_1 e X_2 são v.a.'s independentes, então $Y_1 = f_1(X_1)$ e $Y_2 = f_2(X_2)$ também são v.a.'s independentes.

7 — Dado $\epsilon > 0$, e deixe $X_i, i \geq 1$ ser uma sequência não negativa de variáveis aleatórias independentes tais que $\mathbb{P}(X_i > \delta) > \epsilon$ para todo i. Prove que com probabilidade 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \infty.$$

8 — Lei zero-um de Kolmogorov para variáveis aleatórias

Suponha que $(X_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes, defina a σ-*álgebra caudal* de $(\sigma\langle X_n \rangle : n \in \mathbb{N})$ por

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots),$$

e mostre que $\mathcal{T}$ contém somente eventos de probabilidade 0 ou 1. Mais ainda, mostre que toda variável aleatória mensurável com respeito a $\mathcal{T}$ é constante quase certamente.

9 — Considere $\{Z_n, n \geq 1\}$ serem variáveis aleatórias independentes, e mostre que o raio de convergência R da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n x^n$ é constante com probabilidade 1, onde

$$R = \left(\limsup |Z_n|^{1/n}\right)^{-1}.$$

10 — Variáveis Aleatórias Discretas Independentes

a) Mostre que se X e Y são variáveis aleatórias tomando valores inteiros independentes, então

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_k \mathbb{P}(X = k)\, \mathbb{P}(Y = n - k).$$

b) Dadas X e Y variáveis aleatórias independentes de Poisson com parâmetros λ e μ respectivamente. Prove que $X + Y$ é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda + \mu$.

c) Dadas X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição Binomial de parâmetros (n, p) e (m, p) respectivamente. Prove que $X + Y$ é uma variável aleatória Binomial com parâmetro $(n + m, p)$.

11 — Convolução Sejam X e Y v.a.'s independentes com funções de distribuição F_X e F_Y respectivamente. Lembre que a distribuição conjunta de X, Y como a medida ν em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dada por $\nu(B) = \mathbb{P}((X, Y) \in B)$. Denote por μ_X e μ_Y as distribuições de X e Y respectivamente, dadas por $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ e $\mu_Y(A) = \mathbb{P}(Y \in A)$.

a) Mostre que $\nu = \mu_X \times \mu_Y$, e conclua (Fubini) que se $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é ν-integrável, então

$$\mathbf{E}[\phi(X, Y)] = \int\int \phi(x, y) dF_X(x) dF_Y(y) = \int\int \phi(x, y) dF_Y(y) dF_X(x);$$

b) Use o item anterior para mostrar que

$$F_{X+Y}(t) = \mathbb{P}(X + Y \leq t) = \int F_X(t - y) dF_Y(y) = \int F_Y(t - x) dF_X(x).$$

(A medida $\lambda(\cdot)$ tal que $\lambda((-\infty, t]) = F_{X+Y}(t)$ é conhecida como *convolução* das mediadas μ_X e μ_Y e denotada por $\lambda = \mu_X * \mu_Y$.)

12 — Mostre que se X e Y são variáveis aleatórias absolutamente contínuas com densidade f_X e f_Y respectivamente, então $Z = X + Y$ é absolutamente contínua com densidade

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_X(z - x) f_Y(y) dy =: f_X * f_Y(z).$$

13 — Mostre que se $T_1, T_2, \ldots$ são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, então $S_n = T_1 + \cdots + T_n$ possui distribuição Gama com parâmetros n e λ. Ou seja, S_n tem densidade

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}.$$

14 — Com as mesmas hipóteses do exercício anterior, defina para $t \geq 0$ a variável aleatória $N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, com $N(t) = 0$ se $T_1 > t$. Mostre que $N(t)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro λt. Ou seja

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

* **15 — Outra construção da Distribuição de Cantor**

Dadas v.a.'s Y_n, $n \geq 1$, i.i.d. tais que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1/2$, defina

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Y_n}{3^n}$$

a) Prove que a função de distribuição F_Y é contínua.

b) Prove que F_Y é diferenciável q.c. com derivada igual a 0 q.c. (Dica: Prove que F_Y é constante em qualquer intervalo contido no complemento do conjunto de Cantor.)

c) Dado μ_Y a distribuição de Y. E m a medida de Lebesgue na reta real. Prove que μ_Y e m são mutualmente singulares. Ou seja que existe um conjunto de Borel A com $m(A) = 0$ e $\mu_Y(A^c) = 0$.

16 — Dadas X e Y duas variáveis aleatórias, não necessariamente definidas no mesmo espaço de probabilidade, diremos que a variável aleatória Y **estocasticamente maior** que X (ou que Y domina estocasticamente X), denotado por $X \preceq Y$, se $\mathbb{P}[X \leq x] \geq \mathbb{P}[Y \leq x]$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Tome então X e Y duas variáveis aleatórias tais que $X \preceq Y$, e mostre que existem variáveis aleatórias X^* e Y^* definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tais que $F_{X^*} = F_X$, $F_{Y^*} = F_Y$ e $X^*(\omega) \leq Y^*(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

Esperança

17 — Dada uma v.a. integrável X, mostre que

a) Se X é positiva, então

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,dt;$$

b) De modo geral, para X não necessariamente positiva

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,dt - \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(X < t)\,dt.$$

18 — Mostre que para variáveis aleatórias discretas,

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^\infty x_k \mathbb{P}(x = x_k), \tag{1}$$

se a série é absolutamente convergente

19 — Dê exemplos de variáveis aleatórias X e Y definas em $[0, 1]$ com a medida de Lebesque tal que $\mathbb{P}(X > Y) > 1/2$, mas $\mathbf{E}(X) < \mathbf{E}(Y)$.

20 — Suponha que $X_1, X_2, \dots$ é uma sequência de variáveis independentes em (Ω, F, P). Mostre que as duas famílias $X_1, X_3, X_5, \dots$ e $X_2, X_4, X_6, \dots$ são independentes.

21 — Prove a Desigualdade de Cauchy-Schwarz: dadas duas variáveis aleatórias X e Y, temos

$$|\mathbf{E}XY| \leq \sqrt{\mathbf{E}[X^2]\mathbf{E}[Y^2]}, \tag{2}$$

e a igualdade ocorre se e somente se $X = \alpha Y$ ou $Y = \alpha X$, para alguma constante $\alpha \in \mathbb{R}$.

22 — O coeficiente de correlação de Pearson de duas variáveis aleatórias $X, Y \in L_2$ é definido como

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

onde $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ e $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$ são os desvios-padrão das variáveis x e Y, respectivamente. Com esta definição em mente, mostre que

a) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$;

b) $\rho(X, Y) = 1$ se, e só se, existe $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $Y = \alpha X + \beta$;

c) $\rho(X, Y) = -1$ se, e só se, existe $\alpha < 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $Y = \alpha X + \beta$;

23 — Revisão e ajuda para o próximo exercício Seja $X_n,\ n \geq 1$ uma sequência de variáveis aleatórias. Mostre que

a) se $\sum_n X_n$ converge quase-certamente e $|\sum_{k=1}^n X_k| < Y$, para todo $n \geq 1$ e alguma v.a. Y integrável, então $\sum_n X_n$ é integrável, cada X_n é integrável, e $\mathbf{E}(\sum_n X_n) = \sum_n \mathbf{E}X_n$;

b) se $\sum_n \mathbf{E}|X_n| < \infty$ então $\sum_n X_n$ é quase certamente absolutamente convergente e integrável, e $\mathbf{E}(\sum_n X_n) = \sum_n \mathbf{E}X_n$.

24 — Função Geradora de Momentos Dada uma v.a. X defina $M_X(t) = \mathbf{E}[e^{tX}]$, conhecida como *função geradora de momentos de X*. Faça $I = \{t \in \mathbb{R} : M_X(t) < \infty\}$ e mostre que

a) I é um intervalo (possivelmente degenerado) contendo 0;

b) Se 0 pertence ao interior de I, então X possui k-ésimo momento para todo $k \in \mathbb{N}$;

c) $M_X(t)$ é uma função contínua e convexa em I;

d) Se 0 pertence ao interior de I, $M_X(t)$ é diferenciável no interior de I e $M_X^{(k)}(0) = \mathbf{E}X^k$, justificando o nome da função ($f^{(k)}(t)$ denota a k-ésima derivada de f);

25 — Convergência de Geradoras de Momentos Seja $X_n,\ n \geq 1$ uma sequência de v.a.'s i.i.d., com média 0, variância comum σ^2 e $M_{X_1}(t)$ finita em um intervalo aberto em torno de 0, e $Z \sim \text{Normal}(0,1)$.

a) Calcule $M_Z(t)$;

b) Mostre que se $M_n(t)$ é a geradora de momentos de $S_n/\sigma\sqrt{n}$, onde $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, então

$$M_n(t) = \left[M_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n;$$

c) Mostre que $M_n(t) \to M_Z(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ quando $n \to \infty$.