Lista 5 - Probabilidade

Desigualdades e Convergência

Desigualdades

1 — Desigualdade de Catelli Mostre que se X é uma variável aleatória de média $\mu \in \mathbb{R}$ e variância $\sigma^2 < \infty$, então para $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}(X - \mu \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha}.$$

(**Dica:** Comece mostrando que $\mathbb{P}(X - \mu \geq \alpha) \leq \mathbb{P}((X - \mu + y)^2 \geq (\alpha + y)^2)$. Use a desigualdade de Markov e minimize para $y > 0$.)

2 — Demonstração Probabilística do Teorema de Weierstrass
Utilize a desigualdade de Chebyshev para mostrar que para toda função continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1 - x)^k \to f(x)$$

uniformemente em $x \in [0, 1]$ quando $n \to \infty$.
(**Dica:** Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes cada uma assumindo os valores 0 e 1 com probabilidade p e $1 - p$ respectivamente. Seja $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ o número de caras em n lançamentos. Defina o polinômio $r_n(p) = \mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]$ e estude a expressão $|r_n(p) - f(p)|$.)

3 — Sharpness da desigualdade de Chebyshev
Para cada $t \geq 1$, construa uma variável aleatória X com média μ e variância σ^2, e tal que a desigualdade de Chebyshev se torna uma igualdade:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t\sigma) = \frac{1}{t^2}.$$

4 — Deixe X ser uma variável aleatória não-negativa, tal que $\mathbf{E}X$ existe.

a) Mostre através de um exemplo que $\mathbf{E}(X^2)$ pode não existir.

b) Considere o truncamento $X_n = \min(X, n)$. Prove que para todo $p > 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\, \mathbf{E}(X_n^2) < \infty.$$

c) Prove a propriedade anterior para $p = 2$.

5 — Deixe $X_1, \ldots X_n$ serem variáveis aleatórias reais independentes e deixe $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Mostre que para $t > 0$ a desigualdade de Etemadi é válida:

$$\mathbb{P}\left[\max_k |S_k| \geq t\right] \leq 3 \max_k \mathbb{P}\left[|S_k| \geq t/3\right].$$

Dica: Considere os conjuntos

$$A_j := \left\{\max_{1\leq k<j} |S_k| < 3r, |S_j| \geq 3r\right\}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

e observe que

$$\left\{\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq 3r\right\} = \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

Modos de Convergência

Notação: Nos exercícios que seguem usaremos a seguintes notações

1. $\xrightarrow{p}$ para convergência em probabilidade;
2. $\xrightarrow{D}$ para convergência em distribuição;
3. $\xrightarrow{L^p}$ para convergência em L^p;

6 — Suponha que $X_n \to X$ em distribuição e a_n sejam números reais tais que $a_n \to 0$ como $n \to \infty$. Mostre que $a_n X_n \to 0$ em distribuição.

7 — Suponha que $X_n \xrightarrow{D} X$ e $Y_n \xrightarrow{p} c$, onde c é uma constante. Prove que $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$, e $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$.

8 — Prove o Teorema da Aplicação Contínua para $\xrightarrow{p}$:

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$$

9 — Deixe X_n ser uma sequência de variáveis aleatórias independentes que converge em probabilidade para X. Mostre que X é constante quase certamente.

10 — Prove que se $X_n \xrightarrow{L^2} X$ para $r \geq 1$. Mostre que $\mathbf{Var}[X_n] \to \mathbf{Var}[X]$.

11 — Considere as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$ com funções de distribuição $F_1, F_2, \ldots$. Suponha que $X_n \to X$ em distribuição, e a função de distribuição F de X seja contínua. Prove que $F_n \to F$ na norma sup, i.e.

$$\|F_n - F\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0.$$

12 — Considere as variáveis aleatórias a valores inteiros $X_1, X_2, \ldots$, e uma variável aleatória X. Mostre que $X_n \to X$ na distribuição se e somente se

$$\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k) \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

13 — Considere variáveis aleatórias independentes $X_1, X_2, \ldots$ uniformemente distribuídas em $[0, 1]$, e deixe $Z_n = \max_{k \leq n} X_k$.

a) Prove que $Z_n \to 1$ em probabilidade.

b) Prove que $Z_n \to 1$ quase certamente.

14 — Realizamos o seguinte experimento aleatório. Colocamos $n \geq 10$ bolas azuis e n bolas vermelhas em uma bolsa. Nós escolhemos 10 bolas aleatoriamente (sem substituição) da bolsa. Deixe X_n ser o número de bolas azuis. Realizamos esse experimento para $n = 10, 11, 12, \cdots$. Prove que $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{Bin}\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

15 — Deixe $X_1, X_2, X_3, \cdots$ ser uma sequência de variáveis aleatórias, de modo que

$$X_n \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{\lambda}{n}\right), \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{1}$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante. Defina uma nova sequência Y_n como

$$Y_n = \frac{1}{n} X_n, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2}$$

Mostre que Y_n converge em distribuição para $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

16 — Considere a sequência $\{X_n, n = 1, 2, 3, \cdots\}$ tal que

$$X_n = \begin{cases} n & \text{com probabilidade } \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - \frac{1}{n^2} \end{cases} \tag{3}$$

Mostre que

a) $X_n \xrightarrow{p} 0$.

b) $X_n \xrightarrow{L^r} 0$, para $r < 2$.

c) X_n não converge para 0 na r-média para qualquer $r \geq 2$.

d) $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$.

17 — A Distribuição de Cantor

Dado $x \in [0, 1]$ seja $a_n(x), n \geq 1$ a sequência formada pelos coeficientes da expansão ternária de x. Ou seja,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{3^n}.$$

Defina agora $N(x) = \inf\{n \geq 1 : a_n(x) - 1\}$, fazendo $N(x) = \infty$ quando tal ínfimo não existe. A seguir tome $G : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por

$$G(x) = \frac{1}{2^{N(x)}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N(x)-1} \frac{a_n(x)}{2^n}, \qquad x \in [0, 1],$$

com $G(x) = 0$ para $x < 0$ e $G(x) = 1$ para $x > 1$. Denote por C o conjunto de Cantor em $[0, 1]$ e mostre que

a) Mostre que G não depende da escolha da expansão ternária usada (finita ou infinita) para definir a sequência $(a_n(x))_{n \geq 1}$;

b) Mostre que G é constante nos intervalos que formal C^c;

c) Mostre que G é contínua, mas não absolutamente contínua;

d) Conclua que G é uma função distribuição, conhecida como *distribuição de Cantor* ou *escaleira do Diabo*.
(**Dica:** Lembre-se que o conjunto de Cantor pode ser definido como o conjunto dos $x \in [0, 1]$ que possuem uma representação ternária com coeficientes 0 ou 2. Ou seja, $a_n(x) \in \{0, 1\}$ para todo $n \geq 1$.)

18 — Considere a construção clássica do conjunto de Cantor onde, dado $C_0 = [0, 1]$ formamos uma sequência de intervalos fechados $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$, onde C_k é formado retirando de cada intervalo compõe C_{k-1} o terço médio aberto.
Deste modo temos $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$, e assim por diante.

Para cada $n \geq 1$, o conjunto C_n é composto de 2^n intervalos fechados de comprimento $1/3^n$, enquanto C_n^c é formado $2^n - 1$ intervalos abertos. Denote então $C_n^c = I_{1,n} \cup \cdots \cup I_{2^n,n}$, de modo que se $x \in I_{i,n}$ e $y \in I_{j,n}$ com i<j, então $x < y$.
Defina a função distribuição $F_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ por

$$F_n = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & x \in I_{k,n},\ k = 1, \ldots, 2^n - 1 \\ 0, & x < 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

e para $x \in C_n$, defina $F_n(x)$ por interpolação linear de modo a fazer F_n contínua.
Mostre que $F_n(x) \to G(x)$, definida no exercício anterior, para todo $x \in \mathbb{R}$.

19 — Seja $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. com $\mathbb{P}[X_k = 0] = \mathbb{P}[X_k = 2] = 1/2$.

a) Prove que $Z = \sum_{k=1}^{\infty} X_k/3^k$ é convergente quase certamente.
b) Prove que Z tem distribuição de Cantor.
c) Use os itens anteriores para calcular a média e variância da distribuição Cantor.