

Lista 6 - Probabilidade

Convergência Fraca, Lei dos Grandes Números, e Teorema do Limite Central

Convergência Fraca e Funções Características

1 — Calcule as funções características a seguir, confirmando as entradas da seguinte tabela:

Distribuição	Função Característica
Binomial	$[(1 - p) + pe^{it}]^n$
Poisson	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Normal	$e^{i\mu t - \frac{(\sigma t)^2}{2}}$

2 — Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes então $\varphi_{X+Y} = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

3 — Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ são independentes, então $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$.

4 — Se $X_1 \sim \text{Normal}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \text{Normal}(\mu_2, \sigma_2^2)$ são variáveis aleatórias independentes, então $X_1 + X_2 \sim \text{Normal}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

5 — Prove que se $X = aY + b$, então $\varphi_X(t) = \varphi_{aY+b}(t) = e^{itb}\varphi_Y(at)$

6 — Mostre que se $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ então $X + b \sim \text{Normal}(\mu + b, \sigma^2)$, $bX \sim \text{Normal}(b\mu, (b\sigma)^2)$ e $(X - \mu)/\sigma \sim \text{Normal}(0, 1)$.

7 — Mostre que se $X_1, X_2, \dots$ são i.i.d. com distribuição $\text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ e $S_n = X_1 + \dots + X_n$, então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0, 1).$$

8 — Demonstração da Lei Fraca Grandes Números em usando Funções Características

Em particular, deixe $X_1, X_2, \dots, X_n$ ser i.i.d. variáveis aleatórias com valor esperado

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$$

e função característica $\phi_X(s)$. Seja

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}. \quad (1)$$

a) Prove

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\bar{X}}(s) = e^{is\mu}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

b) Conclua que $\bar{X}_n$ converge para μ em distribuição;

c) Mostre que se uma sequência $(Z_n)_{n \geq 1}$ de v.a. em um mesmo espaço de probabilidade converge em distribuição para uma constante $c \in \mathbb{R}$, então $Z_n \rightarrow c$ em probabilidade;

d) Conclua que $\bar{X}_n$ converge para μ em probabilidade.

9 — Dadas v.a.'s $X_1, X_2, \dots$, e X , com medidas de distribuição μ_{X_n} e μ_X , respectivamente, mostre que as seguintes afirmativas são verdadeiras:

(i) X_n converge para X em distribuição;

(ii) $\int f d\mu_{X_n} \rightarrow \int f d\mu_X$ para toda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada;

(iii) $\int f d\mu_{X_n} \rightarrow \int f d\mu_X$ para toda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitada tal que $\mu_X(D_f) = 0$, onde D_f denota o conjunto dos pontos de descontinuidade de f ;

(iv) (Representação de Skorohod) Existem variáveis $\hat{X}_n, n \geq 1$ e $\hat{X}$, tais que $\hat{X}_n \stackrel{D}{=} X_n, n \geq 1, \hat{X} \stackrel{D}{=} X$ e $\hat{X}_n$ converge para $\hat{X}$ quase-certamente.

(v) $\mu_{X_n}(A) \rightarrow \mu_X(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ com $\mu_X(\partial A) = 0$.

10 — Tome $X_n, n \geq 1$ e X v.a.s aleatórias em um mesmo espaço de probabilidade, assumindo valores inteiros. Mostre que

$$X_n \xrightarrow{D} X \iff \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

11 — Seja $(p_n)_{n \geq 1}$ um sequência tal que $p_n \in (0, 1)$ para todo $n \geq 1$, e $np_n \rightarrow \lambda > 0$. Use o exercício anterior para mostrar que se $X_n \sim \text{Binomial}(n, p_n)$ e $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então $X_n \xrightarrow{D} X$.

12 — Tome $X_n, n \geq 1$ e X v.a.s aleatórias em um mesmo espaço de probabilidade, assumindo valores em um mesmo conjunto enumerável S . Mostre que

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x), \forall x \in S \implies X_n \xrightarrow{D} X.$$

Encontre um contra-exemplo que mostre que a recíproca da afirmativa acima não é verdadeira.

13 — Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a.'s com distribuição

$$F_n(x) := \mathbb{P}(X_n \leq x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi},$$

e $X \sim \text{Uniforme}(0, 1)$. Mostre que $X_n \xrightarrow{D} X$, mas a densidade de X_n não converge para a densidade de X .

14 — Mostre que se $X_n \xrightarrow{D} X$ e $Y_n \xrightarrow{D} c \in \mathbb{R}$, então

- a) $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$;
- b) $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$;
- c) $X_n/Y_n \xrightarrow{D} X/c$ se $c \neq 0$.

15 — Exiba um contraexemplo onde $X_n \xrightarrow{D} X$ e $Y_n \xrightarrow{D} Y$, mas $X_n + Y_n$ não converge em distribuição para $X + Y$.

16 — Sejam $\{\mu_n\}$ e $\{\nu_n\}$ coleções de medidas de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Mostre que

- a) Se a coleção $\{\mu_n\}$ é finita então é tight;
- b) Se $\{\mu_n\}$ é tight, então qualquer subcoleção $\{\mu_{n_k}\} \subseteq \{\mu_n\}$ é tight;
- c) Se $\{\mu_n\}$ e $\{\nu_n\}$ são tight, então $\{\mu_n\} \cup \{\nu_n\}$ é tight.

17 — Dado $x \in \mathbb{R}$, seja δ_x a medida de probabilidade que atribui massa 1 à x . Ou seja $\delta_x(\{x\}) = 1$ e $\delta_x(A) = 0$ se $x \notin A$. Tome agora um compacto $K \subseteq \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de pontos em K . Defina $\mu_n = \delta_{x_n}$ e mostre que

- a) $\{\mu_n\}$ é tight;
- b) se (x_{n_k}) é uma subsequência convergente com $x_{n_k} \rightarrow x$, então $\mu_{n_k} \Rightarrow \delta_x$.

18 — Use funções características para mostrar que se $X_n \sim \text{Binomial}(n, p_n)$, com $np_n \rightarrow \lambda > 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então $X_n \Rightarrow X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Lei dos Grandes Números e Teorema do Limite Central

19 — Prove o Método de Truncamento de Markov, usado na demonstração da Lei Forte: Considere X uma variável aleatória, com média finita. Considere $M > 1$ o nível de truncamento. Defina

$$\lfloor X \rfloor^M := \begin{cases} X, & \text{se } |X| \leq M \\ 0, & \text{se } |X| > M \end{cases} = X \cdot \mathbf{1}_{\{|X| \leq M\}}.$$

Então

- $|\lfloor X \rfloor^M| \leq M$ pontualmente, e $|\lfloor X \rfloor^M| \leq |X|$
- $\lfloor X \rfloor^M \rightarrow X$ pontualmente quando $M \rightarrow \infty$,
- A variável $\lfloor X \rfloor^M$ possui todos os momentos finitos.
- $\mathbf{E}[\lfloor X \rfloor^M] \rightarrow \mathbf{E}[X]$ quando $M \rightarrow \infty$.

20 — Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $\text{Normal}(0, 1)$. Prove que

$$\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{(X_1 - 1)^2 + \dots + (X_n - 1)^2}$$

converge quase certamente e determine para qual valor.

21 — Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $\text{Uniforme}[0, 1]$. Prove que a média geométrica

$$\left(\prod_{k=1}^n X_k \right)^{1/n}$$

converge quase certamente e determine para qual valor.

22 — Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes com $\mathbf{E}[X_i] = 0$ e $\sigma_i^2 = \mathbf{Var}(X_i) < \infty$ para todo i , e seja $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Prove que se $\sum \sigma_k^2/k^2 < \infty$, então $S_n/n \xrightarrow{q.c.} 0$.

Dica: Mostre primeiro que o resultado vale para a subsequência S_{n^2}/n^2 . Em seguida estude $|S_k - S_{n^2}|/n^2$, onde $n = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Para simplificar as contas técnicas, considere primeiro o caso onde $\sigma_k^2 < M < \infty$ para todo $k > 0$ e algum $M \in \mathbb{R}$.

[Esta é uma Lei Forte de Grandes Números para somas independentes, mas não necessariamente identicamente distribuídas.]

23 — Integração de Monte Carlo

Sejam $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua e $X_1, Z_1, X_2, Z_2, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes uniformes em $[0, 1]$. Tomamos

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se } f(X_i) > Z_i \\ 0, & \text{se } f(X_i) \leq Z_i. \end{cases}$$

Prove que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \int_0^1 f(x) dx, \quad \text{quase certamente}$$

24 — Lei dos Grandes Números para Processos de Renovação

Sejam $T_1, T_2, \dots$ variáveis aleatórias i.i.d positivas, com média comum $E(X_1) = \lambda > 0$. Como de costume, faça $S_n = T_1 + \dots + T_n$, e para $t \geq 0$, defina $N_t = \max\{n \geq 0; S_n \leq t\}$ (considere $S_0 = 0$).

- a) Mostre que $N_t \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$;
- b) Mostre que $N_t \rightarrow \infty$ q.c., quando $t \rightarrow \infty$;
- c) Mostre que $N_t/t \rightarrow 1/\lambda$ q.c. quando $t \rightarrow \infty$.

25 — Use o Teorema do Limite Central para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n e^{-n} \frac{n^k}{k!} = 1/2.$$