Introdução à Probabilidade e à Estatística (BCN0406-15)

Prova 1 (A) – Gabarito

1. Um grupo de quatro estudantes deve fazer um trabalho, e para tanto dividiram-no em 4 tarefas distintas, uma para cada estudante.
a) De quantas formas é possível alocar essas 4 tarefas entre os estudantes?
b) O trabalho seguinte era mais complicado, então os estudantes dividiram-no em 8 tarefas, duas para cada estudante. De quantas formas é possível alocar essas tarefas entre os estudantes?

Resposta a) Cada estudante recebe uma tarefa: o primeiro estudante pode escolher entre 4 tarefas, o segundo entre 3, o terceiro entre 2, e ao último só resta 1 tarefa, o que totaliza $4!$ possibilidades.
b) Agora cada estudantes recebe 2 tarefas: o primeiro escolhe 2 em 8, ou seja, tem $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2}$ possibilidades; ao segundo restam 6 tarefas, das quais ele escolhe 2, portanto $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2}$, e assim por diante. O total de possibilidades portanto é

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{8!}{2^4} .$$

Este problema também pode ser pensado como a divisão de 8 tarefas em 4 grupos de 2, cuja solução é o coeficiente multinomial $\binom{8}{2,2,2,2} = \frac{8!}{2^4}$.

2. Se para três eventos A, B e C temos $A \cap B \cap C = A$, o que isso significa? Ou seja, a ocorrência de qual evento garante a ocorrência de qual?

Resposta $A \cap B \cap C = A$ indica que $A \cap B \cap C$ e A são o mesmo evento. Isso quer dizer que, se A acontece, então necessariamente $A \cap B \cap C$ acontece, ou seja, A, B e C acontecem simultaneamente. Em outras palavras, a ocorrência de A garante a ocorrência de B e C. Você também pode pensar neste problema em termos de conjuntos: a igualdade acima implica que $A \subset B \cap C$, ou seja, todos os elementos de A estão contidos na intersecção entre B e C. Isso quer dizer que se ocorre x, um elemento de A, então esse elemento também pertence aos eventos B e C. Note que a recíproca não é verdadeira: podem existir elementos de B e C que não estão contidos em A, logo a ocorrência de B e C não garante a ocorrência de A.

3. Em uma turma de 60 alunos, dos quais 33 são homens e 27 são mulheres, vamos formar um comitê de 5 pessoas. Se os membros do comitê são escolhidos de forma aleatória, qual é a probabilidade de que esse comitê tenha no máximo 1 mulher?

Resposta A probabilidade de que o comitê tenha no máximo uma mulher é a soma das probabilidades de ele ter exatamente uma mulher e de não ter nenhuma mulher. Essas podem ser calculadas contando o número de comitês que podem ser formados com essas quantidades de homens e mulheres dividido pelo número total de comitês que podem ser formados, independentemente do gênero. Então:

$$P(\text{no max. 1 mulher}) = P(\text{0 mulher, 5 homens}) + P(\text{1 mulher, 4 homens}) = \frac{\binom{33}{5}}{\binom{60}{5}} + \frac{\binom{33}{4}\cdot\binom{27}{1}}{\binom{60}{5}} =$$

$$= \frac{\frac{33\cdot32\cdot31\cdot30\cdot29}{5!} + \frac{33\cdot32\cdot31\cdot30}{4!}\cdot 27}{\frac{60\cdot59\cdot58\cdot57\cdot56}{5!}} = \frac{33\cdot32\cdot31\cdot30\cdot(29+5\cdot27)}{60\cdot59\cdot58\cdot57\cdot56}$$

4. A probabilidade de um ônibus demorar muito mais que o usual é de 15% em um dia comum. No entanto, em dias de chuva, essa probabilidade é de 60%. A previsão do tempo amanhã é de 80% de chance de chuva. Qual a probabilidade de que o ônibus não demore mais que o usual?

Resposta Vamos chamar de D o evento de o ônibus demorar muito (logo D^C é o de ele não demorar), e de C o evento de chuva (logo C^C é o evento de dia comum). O enunciado diz que: $P(D|C^C) = 0.15$ e $P(D|C) = 0.6$, e ainda que $P(C) = 0.8$. A pergunta é quanto vale $P(D^C)$. Com os dados, vemos que temos a probabilidade de D condicionada em todos os casos possíveis (chuva e não-chuva), logo podemos calcular $P(D)$ usando a fórmula de probabilidade total e daí obter $P(D^C)$:

$$P(D^C) = 1-P(D) = 1-(P(D|C)\cdot P(C)+P(D|C^C)\cdot P(C^C)) = 1-(0.6\cdot0.8+0.15\cdot0.2) = 0.49$$

5. De acordo com a NOAA (Administração Oceânica e Atmosférica Nacional, dos EUA), a temperatura média global anual da superfície da Terra de cada ano nos últimos 42 anos (de 1976 até 2018) ficou acima da média do século XX. Assumindo que a probabilidade de a média de temperatura de um ano qualquer superar a média do século XX seja independente das médias dos outros anos, e ainda que essa probabilidade seja de 50%, calcule a probabilidade de, em 42 anos, observar pelo menos um ano cuja temperatura fique abaixo da média do século XX.

Resposta De acordo com o enunciado, a probabilidade de em um certo ano a temperatura ser acima da média é de 0.5, e cada ano é independente dos demais. Queremos a probabilidade de observar ao menos um ano com temperatura abaixo da média ($P(X \geq 1)$). Isto é a probabilidade de observar um ano com temperatura abaixo da média ($P(X = 1)$), ou 2 anos ($P(X = 1)$), ou 3 anos ($P(X = 3)$), etc. Uma forma mais simples de calcular é notar que a probabilidade procurada é $1 - P(X = 0)$, ou seja, a probabilidade de não acontecer o evento de todos os anos ficarem acima da média. Essa probabilidade é dada por 0.5^{42}, logo a probabilidade procurada é $1 - 0.5^{42}$, que é aproximadamenete 0.999999999. Veja que a chance de 42 anos seguidos ficarem acima da temperatura média é baixíssima, o que mostra que não estamos em "condições normais".

6. O daltonismo, ou incapacidade de diferenciar algumas cores, pode afetar cerca de 8% dos homens e 0,5% das mulheres. Qual é a probabilidade de uma pessoa daltônica escolhida ao acaso ser mulher? Dica: assuma que a frequência de mulheres na população em geral é 50%.

Resposta Vamos chamar de D o evento de a pessoa ter daltonismo (e D^C o de não ter), e M, H os eventos de ser homem ou mulher. O enunciado diz que $P(D|H) = 0.08$ e $P(D|M) = 0.005$, e ainda que $P(H) = P(M) = 0.5$. Queremos saber $P(M|D)$—veja que já temos as probabilidades de D condicionadas em M e em H ($= M^C$), então podemos usar o teorema de Bayes. Fica assim:

$$P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D|M)P(M) + P(D|H)P(H)} = \frac{0.005\cdot0.5}{0.005\cdot0.5+0.08\cdot0.5} = 0.0588$$