Introdução à Probabilidade e à Estatística (BCN0406-15)

Prova 1 – 12/07/2018 – Correção *(versões das questões entre as mais "divertidas")*

1. Uma avó tem 15 netos, e deseja distribuir 5 livros de probabilidade diferentes entre eles. Para isso, ela sorteia os livros entre seus netos. Quantas resultados distintos são possíveis se
a) Cada neto puder receber qualquer número de livros?
b) Cada neto puder ganhar no máximo um livro?

Solução
a) Cada um dos 5 livros pode ser dado a qualquer um dos 15 netos, logo o total de possibilidades é $15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^5 = 759375$.
b) Cada livro será sorteado para um neto diferente. O primeiro livro tem 15 possibilidades, o segundo tem 14 *etc.*, resultando em $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$.

2. Queremos formar um time de handebol com 6 pessoas, das quais 4 atacantes e 2 defensores, escolhidos entre 30 jogadores, 20 atacantes e 10 defensores.
a) Quantos possíveis times podem ser formados?
b) E se um dos atacantes não aceita ser escalado com um dos defensores, quantas possibilidades restam?

Solução
a) O número total de times é o número de formas de escolher 4 atacantes *vezes* o número de formas de escolher 2 defensores. O primeiro número é o número de grupos de 4 em um total de 20, ou seja, quantas combinações de 4 em um total de 20, $\binom{20}{4}$, enquanto o segundo é, analogamente, $\binom{10}{2}$, logo o total de times é $\binom{20}{4} \cdot \binom{10}{2} = \frac{20!}{16!\,4!}\frac{10!}{8!\,2!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 9}{4!\,2!} = 5 \cdot 19 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 3 = 218025$.
b) Uma das formas de contar é usar a solução anterior, com o total de times *incluindo* aqueles que contêm esses 2 jogadores, e subtrair disso o número de times "proibidos", que contêm ambos. Esses são tais que um dos atacantes é fixado, e um dos defensores também, restando 19 atacantes para ocupar 3 vagas, e 9 defensores para 1 vaga. Pela mesma lógica acima, temos que essas possibilidades são em $\binom{19}{3} \cdot \binom{9}{1} = 8721$. Logo, o total de possibilidades buscado é $\binom{20}{4} \cdot \binom{10}{2} - \binom{19}{3} \cdot \binom{9}{1} = 218025 - 8721 = 209304$.

3. O conteúdo a ser estudado para uma prova tem 9 tópicos. Um estudante conseguiu estudar apenas 6 desses tópicos. A prova é composta por 5 questões, cada uma de um tópico diferente, escolhidos aleatoriamente. Qual a probabilidade de o estudante ter estudado todos os tópicos das questões dessa prova?

Solução

$$P = \frac{\text{\# provas que só contêm os 6 tópicos estudados}}{\text{\# provas que contêm quaisquer dos 9 tópicos}} = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{9}{5}} = \frac{6!\,4!\,5!}{5!\,9!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{21}.$$

4. Um casal tem 2 filhos. Considere que as chances de cada criança ser menino ou menina são iguais.
a) Descreva o espaço amostral dos sexos dos 2 filhos do casal.
b) Você os encontra com um dos filhos, um menino. Qual a probabilidade de os 2 filhos serem meninos? Justifique cuidadosamente.
c) Em seguida, você fica sabendo que esse menino é o mais novo dos 2 filhos. Agora, qual é a probabilidade de os 2 filhos serem meninos?

Solução
a) Espaço amostral: $S = \{(M, M), (M, H), (H, M), (M, M)\}$, onde M e H representam uma filha e um filho, respectivamente, e assumimos que os 4 elementos são igualmente prováveis.
b) É dado que pelo menos um dos dois filhos é menino – vamos chamar esse evento de F, e $F = \{(H, H), (M, H), (H, M)\}$. Queremos a probabilidade de os dois serem meninos dada essa informação, ou seja: $P(H, H|F) = \frac{P(H,H)}{P(F)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$. Outra forma de ver isso é que no novo espaço amostral, F, há 3 elementos igualmente prováveis, dos quais 2 meninos ($\{(H, H)\}$) é um deles, logo a chance é de 1 em 3.
c) Agora o novo espaço amostral, F', é $F' = \{(H, H), (H, M)\}$, logo a chance de haver 2 meninos, $\{(H, H)\}$, é de 1 em 2, ou: $P(H, H|F') = \frac{P(H,H)}{P(F')} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$.

5. Um cientista está tentando mostrar que chocolate não engorda. Para isso, ele pede que um grupo de 100 pessoas consuma 100g de chocolate por dia durante um mês. Ao fim de um mês, ele mede o ganho de peso dos participantes. A chance de o peso médio do grupo aumentar é de 80%. O cientista então repete o experimento 4 vezes, com grupos de pessoas diferentes. Qual a chance de, em pelo menos uma dessas 4 tentativas, o peso médio do grupo diminuir? (Parece correto o cientista publicar esse resultado positivo? Este não é um exemplo real, mas coisas parecidas de fato são feitas!)

Solução
É dado que a chance de o experimento dar negativo, ou seja, as pessoas, em média, não emagrecerem, é de 80%, logo a chance de ele dar positivo é de $p = 1 - 0.8 = 0.2$ (desconsiderando a possibilidade de o peso médio não mudar). O experimento é repetido 4 vezes e, como foi realizado com grupos diferentes de pessoas, podemos assumir que o resultado em cada uma delas é independente dos resultados anteriores; logo, a probabilidade de ele dar positivo nas 4 vezes, por exemplo, é de p^4. A probabilidade que buscamos, de ele dar positivo pelo menos uma vez, é o evento complementar ao experimento dar negativo nas 4 tentativas, logo: $P(\geq \text{ 1 positivo}) = 1 - P(\text{todos negativos}) = 1 - (1 - p)^4 = 1 - 0.8^4 \approx 0.59$.
Repare que, embora a chance de as pessoas emagrecerem fosse de apenas 20%, a chance de você encontrar esse resultado positivo após 4 tentativas sobe para quase 60% (e seria ainda maior com mais tentativas). Quer dizer, você sempre consegue encontrar um resultado positivo eventualmente, e poderia então "comprovar" qualquer hipótese! Por isso esta não é uma boa prática científica: ao relatar seus resultados, você precisa mostrar todas as tentativas que realizou, inclusive as que deram negativo. No exemplo, digamos que apenas 1 das 4 tentativas deu positivo, e 3 deram negativo – isso parece indicar que chocolate não emagrece, ao contrário da percepção se reportássemos apenas o resultado positivo.

6. Em uma questão de múltipla escolha, 40% dos alunos sabem a resposta certa, enquanto 60% "chutam" uma resposta aleatoriamente entre 4 alternativas. Qual a probabilidade de um estudante que acertou a questão realmente saber a resposta certa?

Solução
Seja C o evento de o aluno saber a resposta certa, e A o de ele acertar a resposta (sabendo ou chutando). Pelo enunciado, temos que $P(C) = 0.4$ e $P(A|C^C) = 0.25$ (1 em 4 alternativas equiprováveis). Também podemos assumir que quem sabe a resposta deve acertar, logo $P(A|C) = 1$. Queremos saber qual a probabilidade de o aluno saber a resposta dado que ele escolheu a alternativa correta, ou seja, $P(C|A)$. Pelo teorema de Bayes, temos

$$P(C|A) = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A)} = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C) + P(A|C^C)P(C^C)} = \frac{1 \cdot 0.4}{1 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.6} \approx 0.72$$