

# Segundo roteiro de exercícios no Scilab Cálculo Numérico

Rodrigo Fresneda

7 de março de 2012

## Guia para respostas:

Entregue os três algoritmos pedidos ao final, além da tabela (1) preenchida.

Data limite para entrega: 25/03/2012

## 1 Movimento num campo central

### 1.1 Introdução

O movimento de uma partícula material de massa  $m$  num campo de força do tipo

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr}(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

onde o potencial  $U(r)$  só depende da distância  $r$  até um ponto fixo dado de massa  $M$ . Na gravitação Newtoniana, o potencial é da forma

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad (1)$$

e se verifica a existência de órbitas fechadas (elipses). A energia do sistema pode ser escrita como

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r).$$

Os pontos críticos  $\dot{r} = 0$  determinam pontos de retorno da trajetória (se a função  $r(t)$  é crescente, no ponto crítico ela a passar a ser decrescente, e vice-versa). Na situação (1), o estudo do potencial efetivo  $U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$  permite concluir a existência de dois pontos de retorno se  $E < 0$ , que corresponde a movimentos limitados, como se depreende do gráfico da função:

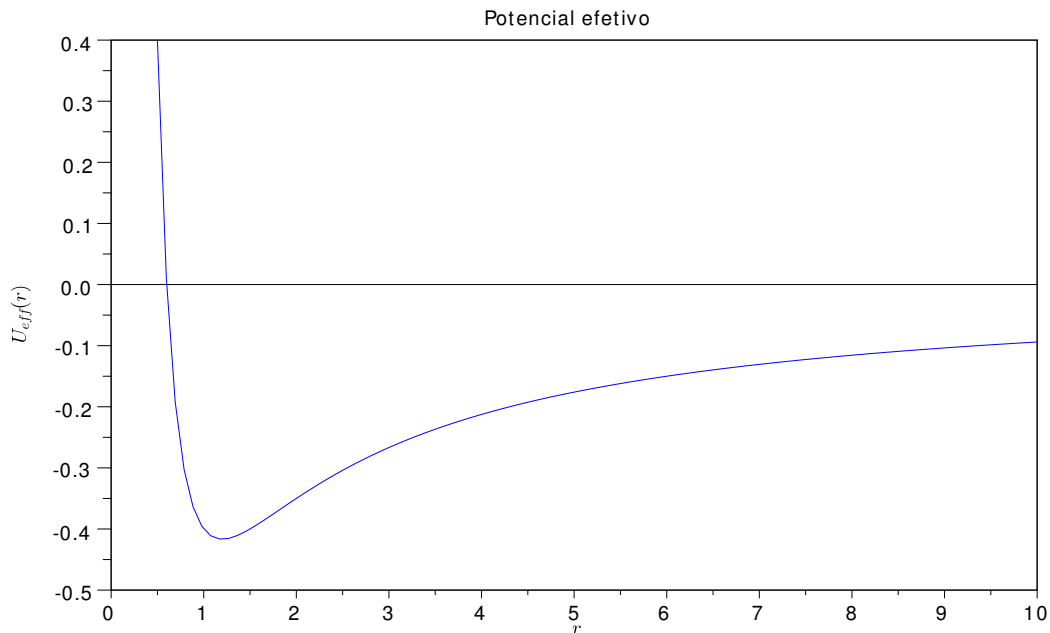


Figura 1: Potencial efetivo  $U_{eff}$  como função da distância  $r$

---

**Algoritmo 1** código para geração da figura 1

---

```
r=linspace(0.5,10,100);
xtitle("Potencial efetivo", "r", "U_{eff}(r)");
plot(r, -r^-1+0.6*r^-2, [0 10], [0 0], "k-");
```

---

Note que o potencial efetivo tende a infinito quando a distância  $r$  tende a zero, impossibilitando de maneira geral a "queda" da partícula ao centro  $r = 0$ . Isto se dá graças ao termo "centrífugo"  $\frac{M^2}{2mr^2}$  que passa a dominar em pequenas distâncias.

Para potenciais não-Newtonianos, no entanto, o fenômeno de queda ao centro pode ocorrer: basta que o termo potencial  $U(r)$  caia suficientemente rápido à medida que  $r \rightarrow 0$ .

## 1.2 O potencial $U(r) = -\frac{\alpha}{r^3}$

De início, vamos estudar o potencial  $-\alpha/r^3$ . Considere  $\alpha = 1$  e  $M^2/2m = 1$  e plote o gráfico do potencial efetivo  $U_{eff}(r) = -\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2}$  no domínio  $[0.5, 10]$ . Ele deve se parecer com:

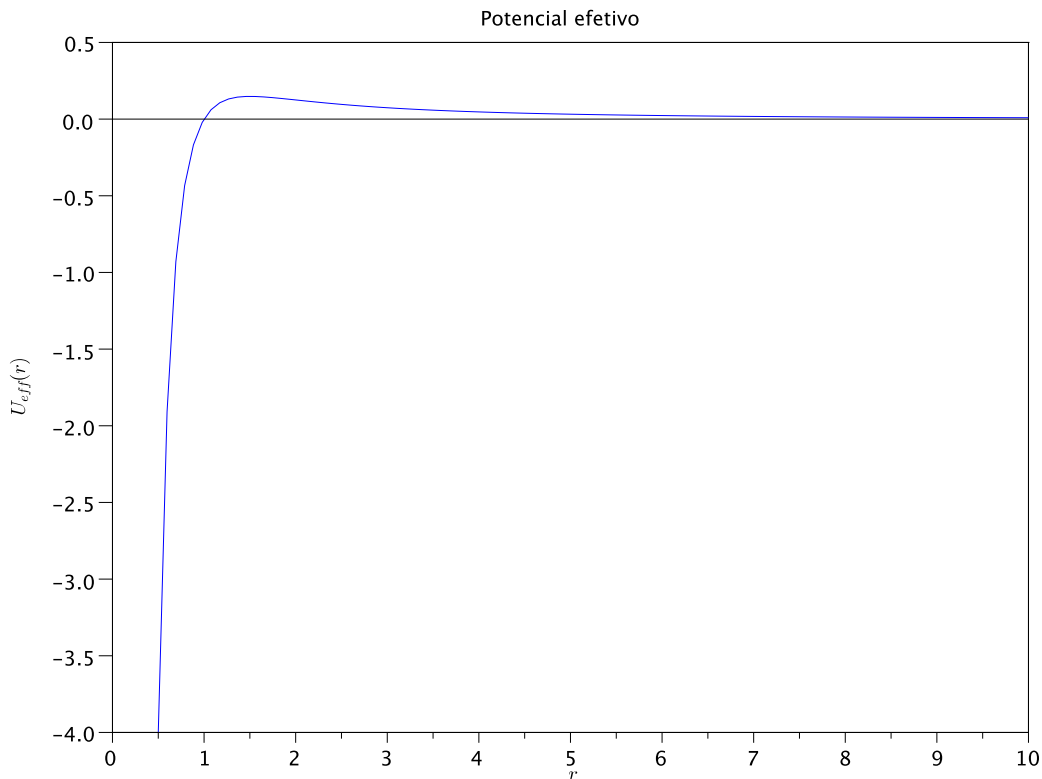


Figura 2: Potencial efetivo  $U_{eff}$  como função da distância  $r$

Observe como o potencial atinge um máximo em  $r = 1.5$ . Para energias menores que  $U_{eff}(1.5) \approx 0.148$ , o movimento da partícula é limitado, com queda ao centro.

Sua tarefa é determinar, por métodos numéricos, qual o raio máximo da trajetória da partícula, para um dado valor de  $E$ , com  $E < 0.148$ . Para tanto, é preciso encontrar a raiz real da equação cúbica

$$-\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} = E$$

Escreva três algoritmos: um de bissecção, um de falsa-posição e um de Newton-Raphson. Cada algoritmo deve receber como entrada um dado valor de  $E$ , e deve contar o número de iterações  $N$  até que o erro

$$|x_{n+1} - x_n| \leq eps \cdot \max\{1, |x_{n+1}|\}$$

onde  $eps$  é o épsilon da máquina no Scilab. Lembre-se de procurar um  $x_0$  próximo da raiz, utilizando o gráfico da função. Utilize seus algoritmos para completar a tabela:

$E$	bissecção				falsa-posição				Newton			
	$[a, b]$	raiz	$N$	$p$	$[a, b]$	raiz	$N$	$p$	$x_0$	raiz	$N$	$p$
0.14												
0												
-1												
-10												
-100												

Tabela 1: tabela comparativa dos algoritmos para alguns valores de energia  $E$

Na tabela,  $N$  é o número de iterações necessárias para se atingir  $eps$ , e  $p$  é a ordem de convergência, estimada de acordo com o exercício 12c da lista 2. Também preenche os parâmetros iniciais para cada algoritmos (os extremos  $a$  e  $b$  na bissecção e falsa-posição, e primeiro ponto  $x_0$  para Newton).

## Referências

- [1] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mechanics*, vol.1, Butterworth-Heinemann; 3 edition.