

Gabarito da Segunda Lista de Cálculo Numérico

Primeiro Trimestre de 2012

Rodrigo Fresneda

Monitores Responsáveis: Eduardo Jabes e Gregory de Oliveira

1)

$$x \pm y = \bar{x} + EA_x \pm \bar{y} + EA_y$$

$$EA_{x \pm y} = EA_x \pm EA_y$$

$$ER_{x \pm y} = \frac{EA_x \pm EA_y}{\bar{x} \pm \bar{y}}$$

$$ER_{x \pm y} = \frac{EA_x}{\bar{x} \pm \bar{y}} \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \pm \frac{EA_y}{\bar{x} \pm \bar{y}} \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{y}}$$

$$ER_{x \pm y} = \frac{EA_x}{\bar{x}} \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{x} \pm \bar{y}} \pm \frac{EA_y}{\bar{y}} \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{x} \pm \bar{y}}$$

$$ER_{x \pm y} = ER_x \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{x} \pm \bar{y}} \pm ER_y \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{x} \pm \bar{y}}$$

2) a.

N	ΔI_n
1	0,3680
2	0,2640
3	0,2080
4	0,1680
5	0,1600
6	0,0400
7	0,7200

b. $\Delta I_7 = -0,5040$

c.

N	ΔI_n	N	ΔI_n
20	0,0000	13	$0,6694 \cdot 10^{-1}$
19	$0,5000 \cdot 10^{-1}$	12	$0,7177 \cdot 10^{-1}$
18	$0,5000 \cdot 10^{-1}$	11	$0,7755 \cdot 10^{-1}$
17	$0,5278 \cdot 10^{-1}$	10	$0,8388 \cdot 10^{-1}$
16	$0,5672 \cdot 10^{-1}$	9	$0,9161 \cdot 10^{-1}$
15	$0,5902 \cdot 10^{-1}$	8	0,1009
14	$0,6273 \cdot 10^{-1}$	7	0,1124

d. Em primeira instancia, fica claro que o valor de I_7 em a está errado pelo fato da sequencia ser decrescente. Se ainda considerarmos que para todo n é válida a relação:

$$I_n < \frac{1}{n+1}$$

A relação pode ser obtida analisando os termos e provando que se a relação acima é válida para n , é valida para $n+1$ através de PIF.

Outra análise é o fato de o erro no caso a ser sempre crescente, se acumulando quanto maior o numero de iterações. No caso c , o erro é sempre decrescente. Caso você assuma um erro bastante pequeno, como $I_{20} = 0$, o erro ainda é distribuído por cada uma das iterações, propiciando um valor mais exato.

3) a.

x	x^3+3x-1	Sinal
0	-1	-
0,1	-0,699	-
0,2	-0,392	-
0,3	-0,073	-
0,4	0,264	+
0,5	0,625	+

Há uma raiz no intervalo (0,3, 0,4), pois $f(0,3) = -0,073$, $f(0,4) = 0,264$, e portanto, $f(0,3)f(0,4) < 0$.

b.

x	$x^2-\text{sen}(x)$	Sinal
-0,4	0.5494	+
-0,2	0.2387	+
0,2	-0.1587	-
0,4	-0.2294	-
0,6	-0.2046	-
0,8	-0.0774	-
1,0	0.1585	+

Há uma raiz no intervalo (-0,2, 0,2), pois $f(-0,2)f(0,2) < 0$. E há outra raiz também no intervalo (0,8 . 1,0), pois $f(0,8)f(1,0) < 0$.

4) A função $f(x)$ é uma função contínua, então basta calcular os valores da função:

$$f(-1) = -0,0542, f(0) = 0,0177, f(1) = -0,0511$$

$f(-1)f(0) < 0$ e $f(0)f(1) < 0$, portanto, entre os intervalos (-1, 0) e (0, 1) existe raíz.

5) Estimativa de iterações necessárias: 6 iterações.

a. $x = 0,65$.

b. $x = 0,56$.

6) $x = 0,848$.

7) c. 693146 iterações seriam necessárias. No caso da bissecção, para atingir um erro absoluto de 2^{-48} seriam necessárias no mínimo 48 iterações.

8)

z_0	0,0909
z_1	0,1735
z_2	0,2486
z_3	0,3169
z_4	0,3790
z_5	0,4355

9) O primeiro. A primeira função, nas redondezas de x_1 é contínua, com derivada contínua e módulo menor que 1. É possível, assim, escolher um intervalo centrado em x_1 para aplicar o método. Mas na segunda função, o módulo de sua derivada só é menor que 1 se $x > 1,025$, onde não se encontra a raiz x_1 .

10) Escolheria a opção ψ_2 pois é a única que tem módulo da derivada menor que 1 em um intervalo próximo ao ponto 1. A sequência gerada a partir de $x_0=1,2$ é:

x_0	1,2
x_1	1,04
x_2	1,0016
x_3	1

11) O módulo da derivada de $\varphi(x)$ é menor que 1 se e somente se $x^2 > a$, portanto não existe intervalo em torno de $\sqrt{a}$ tal que o módulo da derivada de $\varphi(x)$ seja menor que

1. Para o segundo caso, temos $|\varphi'(x)| < 1$ para todo $x > \sqrt{\frac{N}{3}}$, então podemos escolher

um intervalo (por exemplo, entre $\sqrt{\frac{N}{3}}$ e $\left(2\sqrt{N} - \sqrt{\frac{N}{3}}\right)$ centrado em $\sqrt{N}$.

12) a. $x = 0,9047851$

b. $x = 0,9047882$

c.

Bissecção				Newton			
x_{k-1}	0.9042	Δx_{k-1}	$-5.88 \cdot 10^{-4}$	x_{k-1}	0.9084	Δx_{k-1}	$3,61 \cdot 10^{-3}$
x_k	0.9052	Δx_k	$4.11 \cdot 10^{-4}$	x_k	0.9046	Δx_k	$-1.88 \cdot 10^{-4}$
x_{k+1}	0.9047	Δx_{k+1}	$-8.82 \cdot 10^{-5}$	x_{k+1}	0.9047	Δx_{k+1}	$-8.82 \cdot 10^{-5}$
p	4,322			p	0.256		

13)

14) a. Isolando-se o x e passando o Q para o lado esquerdo, chegaremos em $x^3 - Q = 0$. Utilizando o método de iteração de Newton para a função $f(x) = x^3 - Q$, vamos obter a mesma expressão anterior.

b. $\sqrt[3]{4} = 1,58$.

15) Utilizando o método da falsa posição para a função $f(x) = x^3 - 4$ entre o intervalo (1, 2), obtemos, após 17 iterações, a raiz da função $x = 1,58740$.

16) a.

i - Converge porque Imagem de $\varphi_+(x) = [-\infty, 0]$

ii - Converge porque Imagem de $\varphi_-(x) = [0, +\infty]$

iii - A diferença se dá devido aos intervalos em que está a imagem das funções iterações, visto que para que o valor convirja para determinada a raiz, a raiz deve estar contida dentro do intervalo da imagem

b . Aplicando o critério de convergência, temos que φ' tem de ser menor que 1. Para tal: $x < 2,48$. Portanto as funções iterações não convergem para a raiz próxima de 4, independente do x.

17)

a.

$$\varphi(x) = x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = -1 + 2 \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{f'(x)^2} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)^2} = \frac{1}{2f''(\xi)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \varphi'(x) = 0$$

b . $x = 1.069$