Segunda lista de Cálculo Numérico
Primeiro trimestre de 2012
Rodrigo Fresneda

1 de março de 2012

1. Sejam x_1 e x_2 dois números reais, e ε_{x_1} e ε_{x_2} seus respectivos erros relativos de arredondamento num sistema de ponto flutuante F, mostre que a propagação desses erros na soma/subtração tem a forma:
$$\varepsilon_{x_1 \pm x_2} = \frac{x_1}{x_1 \pm x_2}\varepsilon_{x_1} \pm \frac{x_2}{x_1 \pm x_2}\varepsilon_{x_2}$$
Em que situação essa soma é mal-condicionada, i.e., os erros de arredondamento são amplificados?

2. Integre por partes a integral a abaixo para
$$I_n = e^{-1} \int_0^1 x^n e^x dx$$
para obter a relação de recorrência
$$I_n = 1 - nI_{n-1}\,,\ n = 1, 2, ...$$
   (a) Calcule I_7, considerando $I_0 = 0.632$ e faça todas as operações de aritmética no sistema de ponto flutuante $F\,(10, 4, \infty, \infty)$.

   (b) Verifique que o erro absoluto na integral I_n, $\Delta I_n = \bar{I}_n - I_n$, depende fatorialmente do erro inicial ΔI_0 pela relação
$$\Delta I_n = (-1)^n\, n! \Delta I_0\,,$$
   e estime o erro cometido em I_7 no item anterior.

   (c) Agora calcule I_7 utilizando a recursão $I_{n-1} = \frac{1-I_n}{n}$ assumindo, por exemplo, $I_{20} = 0$. Obtenha a fórmula para propagação de erro nesse caso, e estime o erro cometido.

   (d) Interprete seus resultados.

3. Dadas as funções

   (a) $x^3 + 3x - 1 = 0$

   (b) $x^2 - \sin x = 0$

pesquisar a existência de raízes reais e isolá-las em intervalos. Para tanto, esboçe o gráfico dessas funções e utilize o teorema do anulamento.

4. Justifique que a função:

$$f(x) = \cos \frac{\pi (x+1)}{8} + 0.148x - 0.9062 = 0$$

possui uma raiz no intervalo $(-1, 0)$ e outra no intervalo $(0, 1)$.

5. Mostre que as seguintes equações possuem exatamente uma raiz e que em cada caso a raiz está no intervalo $[0.5, 1]$.

   (a) $x^2 + \ln x = 0$

   (b) $xe^x - 1 = 0$.

   Determine essas raízes, com duas casas decimais corretas, usando o método da bissecção. Antes de calcular, estime quantas iterações serão necessárias para obter o resultado.

6. Econtre com precisão de três casas decimais a raiz da equação $\sin(x) - 0.750 = 0$ pelo método da falsa posição com $a = 0.80$ e $b = 0.90$.

7. Considere uma função dada pela expressão

$$f(x) = \begin{cases} \delta\,,\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 4(1+\delta)\left(x - x^2\right) - 1\,,\ \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

   (a) Calcule, utilizando o método da falsa posição, que o primeiro termo da sequência, com $a = 0$ e $b = 1$, é dado por

$$z_0 = 1 - \frac{1}{1+\delta}$$

   (b) Mostre que termo z_n é dado por

$$z_n = 1 - \frac{1}{(1+\delta)^{n+1}}$$

   caso n seja tal que $z_{n-1} \le \frac{1}{2}$.

   (c) Para $\delta = 10^{-6}$, quantas iterações seriam necessárias para que $z_n \ge \frac{1}{2}$? No caso de bissecção, quantas iterações seriam necessárias para atingir um erro absoluto de 2^{-48}?

8. Calcule 5 iterações por falsa posição para a função do exercício anterior com $\delta = 0.1$.

9. Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são: $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 2.0$. Considere ainda os processos iterativos:

   (a) $x_{k+1} = \frac{2x_k^2+2}{5}$

   (b) $x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}$

   Qual dos dois processos você utilizaria para obter a raiz x_1? Por quê?

10. Considere as seguintes funções:

    (a) $\psi_1(x) = 2x - 1$
    (b) $\psi_2(x) = x^2 - 2x + 2$
    (c) $\psi_3(x) = x^2 - 3x + 3$

    Verifique que 1 é ponto fixo de todas essas funções. Qual delas você escolheria para obter o ponto fixo 1, utilizando o processo iterativo $x_{k+1} = \psi(x_k)$? Com a sua escolha, exiba a sequência gerada a partir da condição inicial $x_0 = 1.2$.

11. A equação $x^2 - N = 0$ possui uma raiz $\xi = \sqrt{N}$. Explicar por que a sequência $\{x_k\}$, obtida por meio do processo iterativo definido por $x_{k+1} = \frac{a}{x_k}$ não converge para $\sqrt{a}$ qualquer que seja o valor de x_0. Repita a análise para o processo iterativo $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{N}{x_k}\right)$.

12. Considere a equação $4\cos(x) - e^x = 0$. Encontre a raiz positiva com quatro casas decimais corretas utilizando

    (a) bissecção;
    (b) método de Newton.
    (c) Utilizando a expressão

    $$p \simeq \frac{\log\left(\left|\frac{\Delta x_{k+1}}{\Delta x_k}\right|\right)}{\log\left(\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta x_{k-1}}\right|\right)}$$

    obtenha o valor de p para $k+1$ a última iteração calculada nos itens a) e b), em que $\Delta x_k = x_k - \xi$ é o erro absoluto entre a aproximação x_k e a raiz exata ξ. Considere que a solução exata é $\xi = 0.9047882$.

13. Deduza a expressão aproximada para ordem de convergência p utilizada no item 12c.

14. Considere a fórmula para determinar a raiz cúbica de Q:

    $$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_k + \frac{Q}{x_k^2}\right)$$

    (a) Mostre que a fórmula anterior é um caso especial de iteração de Newton;
    (b) Usando a fórmula dada, calcule $\sqrt[3]{4}$, com precisão 10^{-2}, determinando o valor inicial através do gráfico.

15. Considere a equação dada no exercício anterior. Obtenha a raiz positiva com 5 casas decimais corretas pelo método da Falsa Posição. Confirme que a ordem de convergência é $p \simeq 1.618$.

16. A equação $e^x - 3x^2 = 0$ tem três raízes. Considere as duas funções de iteração

    $$\varphi_{\pm}(x) = \pm\sqrt{\frac{e^x}{3}}$$

    (a) Verifique que começando com $x_0 = 0$ haverá convergência:

i. para a raiz próxima de -0.5 se φ_- for utilizada;

ii. para a raiz próxima de 1.0 se φ_+ for utilizada.

iii. Explique a razão dessa diferença.

(b) Mostre que $\varphi_\pm$ não produzem um processo iterativo convergente para a raiz próxima de 4 qualquer que seja x_0.

17. Seja ξ uma raiz da equação $f(x) = 0$. Supomos que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam contínuas e limitadas num intervalo fechado I contendo ξ e que $f'(\xi) = 0$ e $f''(\xi) \neq 0$.

(a) Mostre que o método iterativo definido por

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

converge para ξ se $x \in I$.

(b) O método definido em a) estende-se para uma raiz de multiplicidade m da seguinte maneira:

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Calcular a raiz ξ próxima de 1 da equação:

$$f(x) = x^4 - 3.1x^3 + 2.52x^2 + 0.432x - 0.864 = 0$$

com erro relativo inferior a 10^{-3}, usando método descrito aqui e sabendo que $f(\xi) = f'(\xi) = f''(\xi) = 0$ e $f'''(\xi) \neq 0$.