

## Terceira lista de Cálculo Numérico 2014.2

### Rodrigo Fresneda

1. Encontre o polinômio de grau 2 que aproxima a função  $\frac{1}{x+4}$  no intervalo  $[-1, 1]$  utilizando o produto escalar natural em  $C[-1, 1]$ .
2. Seja  $f(x) = (x^3 - 1)^2$ ,  $x \in [0, 1]$ . Usando o método dos mínimos quadrados, aproximar a função  $f(x)$  por
  - (a) uma reta
  - (b) um polinômio do segundo grau

utilizando o produto escalar natural em  $C[0, 1]$ .

3. Aproximar, pelo método dos mínimos quadrados, a função  $f(x) = x^3 + 4$  no intervalo  $[0, 1]$  por
  - (a) uma reta
  - (b) um polinômio do segundo grau

usando polinômios ortonormais.

4. Determinar a parábola mais próxima dos pontos  $(x_i, y_i)$  dados na tabela usando o método dos mínimos quadrados.

$x$	-3	-1	1	2	3
$y$	-1	0	1	1	-1

5. Ajuste um polinômio de grau 2 ao conjunto de pontos dados na tabela abaixo

$x$	-1	0	1	2
$y$	0	-1	0	7

6. Considere o seguinte produto escalar em  $\mathcal{P}_n$ :

$$(p, q) = \sum_{i=0}^n p(x_i) q(x_i),$$

em que  $x_0, \dots, x_n$  são números distintos. Utilize esse produto escalar para refazer as questões 4 e 5.

7. Dada a tabela 

$x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$e^{3x}$	1	1.3499	1.8221	2.4596	3.3201

 obtenha o valor de  $f(x) = xe^{3x}$  no ponto 0.26 utilizando a fórmula de Lagrange de um polinômio interpolador do segundo grau. Estime o erro por meio da fórmula

$$|E(x)| \leq \frac{1}{3!} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \max_{t \in (x_0, x_2)} f^{(3)}(t), \quad x_0 < x_1 < x_2$$

e compare-o com o erro obtido na interpolação.

8. Considere a tabela 

$x$	-2	-1	1	2
$y$	1	-3	1	9

- (a) Pelo método dos mínimos quadrados, ajuste à tabela as funções:

$$g_1(x) = ax^2 + bx, \quad g_2(x) = cx^2 + d$$

- (b) Qual das funções fornece o melhor ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados? Justifique.

9. Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função  $f(x) = 3x^6 - x^4$  no intervalo  $[-1, 1]$  por uma parábola, usando polinômios de Legendre:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad L_0(x) = 1,$$

que são ortogonais segundo o produto escalar

$$(L_i, L_j) = \int_{-1}^1 L_i(x) L_j(x) dx$$

e satisfazem

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

10. Sabendo-se que  $\sqrt{1.03} = 1.0149$  e  $\sqrt{1.04} = 1.0198$ :

- (a) calcular  $\sqrt{1.035}$ , usando interpolação linear.  
 (b) dar um limitante superior para o erro de truncamento.

11. A integral elíptica completa é definida por:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{1/2}}$$

Por uma tabela de valores dessa integral, encontramos:

$$K(1) = 1.5708, \quad K(2) = 1.5719, \quad K(3) = 1.5739$$

Determinar  $K(2.5)$  usando um polinômio de interpolação na forma de Lagrange sobre todos os pontos.

12. Um polinômio  $P_n(x)$  de grau  $n$  coincide com  $e^x$  nos pontos  $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$ . Qual o menor valor de  $n$  que devemos tomar a fim de que se tenha:

$$|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-6} \text{ para } 0 \leq x \leq 1?$$

13. Se  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  são  $n+1$  pontos distintos, mostre que os  $m+1$  vetores

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \dots, u_m = \begin{pmatrix} x_0^m \\ x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix},$$

com  $m \leq n$ , são linearmente independentes.

14. Se  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  são  $n+1$  números distintos e  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  são  $n+1$  valores de uma função,  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , mostre que as equações normais podem ser escritas na forma

$$(X^T X) a = X^T y,$$

em que

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}, m < n.$$

15. Demonstre. Sejam  $e_1, e_2, \dots, e_n$  um conjunto ortonormal num espaço vetorial  $V$  com produto interno, e seja  $y \in V$  qualquer. Então

$$\left\| y - \sum_{i=1}^n (y, e_i) e_i \right\| \leq \left\| y - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|$$

para quaisquer  $a_1, \dots, a_n$ .

16. Mostre que há um único polinômio  $p$  de grau  $n$  ou menor tal que  $p(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , em que  $x_0, \dots, x_n$  são  $n+1$  números distintos e  $y_0, y_1, \dots, y_n$  são quaisquer.
17. Mostre que se  $m = n$  na questão 14, então o polinômio  $p$  de grau  $n$  cujos coeficientes são os  $a_0, \dots, a_n$  é o polinômio interpolador dos pontos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .