

Quarta lista de Cálculo Numérico
Primeiro trimestre de 2012
Rodrigo Fresneda

1. Encontre o polinômio de grau 2 que aproxima a função $\frac{1}{x+4}$ no intervalo $[-1, 1]$ utilizando o produto escalar natural em $C[-1, 1]$.
2. Seja $f(x) = (x^3 - 1)^2$, $x \in [0, 1]$. Usando o método dos mínimos quadrados, aproximar a função $f(x)$ por
 - (a) uma reta
 - (b) um polinômio do segundo grau

utilizando o produto escalar natural em $C[0, 1]$.

3. Aproximar, pelo método dos mínimos quadrados, a função $f(x) = x^3 + 4$ no intervalo $[0, 1]$ por
 - (a) uma reta
 - (b) um polinômio do segundo grau
 usando polinômios ortonormais.

4. Determinar a parábola mais próxima dos pontos (x_i, y_i) dados na tabela usando o método dos mínimos quadrados.

x	-3	-1	1	2	3
y	-1	0	1	1	-1

5. Ajuste um polinômio de grau 2 ao conjunto de pontos dados na tabela abaixo

x	-1	0	1	2
y	0	-1	0	7

6. Considere o seguinte produto escalar em $\mathcal{P}_n$:

$$(p, q) = \sum_{i=0}^n p(x_i) q(x_i) ,$$

em que $x_0, \dots, x_n$ são números distintos. Utilize esse produto escalar para refazer as questões 4 e 5.

7. Dada a tabela
- | | | | | | |
|----------|---|--------|--------|--------|--------|
| x | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| e^{3x} | 1 | 1.3499 | 1.8221 | 2.4596 | 3.3201 |
- obtenha o valor de $f(x) = xe^{3x}$ utilizando a fórmula de Lagrange de um polinômio interpolador do segundo grau. Estime o erro por meio da fórmula

$$|E(x)| \leq \frac{1}{3!} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \max_{t \in (x_0, x_2)} f^{(3)}(t), \quad x_0 < x_1 < x_2$$

e compare-o com o erro obtido na interpolação.

8. Considere a tabela
- | | | | | |
|-----|----|----|---|---|
| x | -2 | -1 | 1 | 2 |
| y | 1 | -3 | 1 | 9 |

- (a) Pelo método dos mínimos quadrados, ajuste à tabela as funções:

$$g_1(x) = ax^2 + bx, \quad g_2(x) = cx^2 + d$$

- (b) Qual das funções fornece o melhor ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados? Justifique.

9. Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função $f(x) = 3x^6 - x^4$ no intervalo $[-1, 1]$ por uma parábola, usando polinômios de Legendre:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad L_0(x) = 1,$$

que são ortogonais segundo o produto escalar

$$(L_i, L_j) = \int_{-1}^1 L_i(x) L_j(x) dx$$

e satisfazem

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

10. Sabendo-se que $\sqrt{1.03} = 1.0149$ e $\sqrt{1.04} = 1.0198$:

- (a) calcular $\sqrt{1.035}$, usando interpolação linear.
 (b) dar um limitante superior para o erro de truncamento.

11. A integral elíptica completa é definida por:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{1/2}}$$

Por uma tabela de valores dessa integral, encontramos:

$$K(1) = 1.5708, \quad K(2) = 1.5719, \quad K(3) = 1.5739$$

Determinar $K(2.5)$ usando um polinômio de interpolação na forma de Lagrange sobre todos os pontos.

12. Um polinômio $P_n(x)$ de grau n coincide com e^x nos pontos $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Qual o menor valor de n que devemos tomar a fim de que se tenha:

$$|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-6} \text{ para } 0 \leq x \leq 1?$$

13. Se $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ são $n+1$ pontos distintos, mostre que os $m+1$ vetores

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \dots, u_m = \begin{pmatrix} x_0^m \\ x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix},$$

com $m \leq n$, são linearmente independentes.

14. Se $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ são $n+1$ números distintos e $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ são $n+1$ valores de uma função, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, mostre que as equações normais podem ser escritas na forma

$$(X^T X) a = X^T y,$$

em que

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}, m < n.$$

15. Demonstre. Sejam $e_1, e_2, \dots, e_n$ um conjunto ortonormal num espaço vetorial V com produto interno, e seja $y \in V$ qualquer. Então

$$\left\| y - \sum_{i=1}^n (y, e_i) e_i \right\| \leq \left\| y - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|$$

para quaisquer $a_1, \dots, a_n$.

16. Mostre que há um único polinômio p de grau n ou menor tal que $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, em que $x_0, \dots, x_n$ são $n+1$ números distintos e $y_0, y_1, \dots, y_n$ são quaisquer.
17. Mostre que se $m = n$ na questão 14, então o polinômio p de grau n cujos coeficientes são os $a_0, \dots, a_n$ é o polinômio interpolador dos pontos (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$.