Quinta lista de Cálculo Numérico
Primeiro trimestre de 2012
Rodrigo Fresneda

24 de abril de 2012

1. Determinar o número de pontos necessários para se obter $f(x) = xe^{3x}$no intervalo $[0, 0.4]$, com dois dígitos significativos corretos, usando interpolação linear sobre pontos igualmente espaçados.

2. Dada a função tabelada

x	0	1	1.5	2.5	3.0
$f(x)$	1.0	0.5	0.4	0.286	0.25

   (a) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton sobre dois pontos.
   (b) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton sobre três pontos.
   (c) Calcular $f(0.5)$usando os itens a) e b)

3. Considerando a função $f(x) = \sqrt{x}$ tabelada

x	1.00	1.10	1.15	1.25	1.3
$f(x)$	1.000	1.048	1.072	1.118	1.140

   (a) Determinar o valor aproximado de $\sqrt{1.12}$ usando polinômios de interpolação de Newton sobre três pontos.
   (b) Calcular um limitante superior para o erro.

4. Sabendo-se que a equação $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ tem uma raiz em $[0, 1]$, determinar o valor aproximado dessa raiz usando polinômio de interpolação de Newton sobre três pontos.

5. Dada a função $y = \sin x$ tabelada

x	1.2	1.3	1.4	1.5
$\sin x$	0.932	0.964	0.985	0.997

   (a) Calcular o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton
   (b) Calcular o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton de diferenças sucessivas
   (c) Calcular $\sin 1.35$
   (d) Dar um limite superior para o erro.

6. Dada a tabela

0	1	2	3	4	5	6
-1	α	5	β	7	γ	13

, calcular α, β e γ, sabendo que ela corresponde a um polinômio do terceiro grau. Sugestão: calcule as diferenças sucessivas.

7. Suspeita-se que a tabela

x	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
y	-9.0	0.0	1.0	0.0	3.0	16.0

represente um polinômio cúbico. Como testar esse fato? Explique.

8. Considere a função $f(x)$ dada pela tabela

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	0	0	0

e o polinômio dado por $p(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$.

   (a) Verifique que $p(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

   (b) $p(x)$ é o polinômio interpolador de $f(x)$sobre os pontos $0, 1, 2$ e 3? Justifique.

9. Mostre que se $p(x)$é o único polinômio de grau n ou menor que toma os valores $y_0, y_1, ..., y_n$ nos $n+1$ pontos $a, a+h, a+2h, ..., a+nh$, então

$$p(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-a) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-a)(x-a-h) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h)$$

Dica: expresse as diferenças divididas na fórmula de Newton em termos de diferenças sucessivas.

10. Mostre que a série de Newton para um polinômio de grau n ou menor tem no máximo $n+1$ termos.
Dica: mostre que a diferença dividida de ordem $n+1$ se anula calculando a diferença sucessiva relacionada.

11. A partir da expressão geral para a diferença dividida de ordem k,

$$[y_0, y_1, ..., y_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\omega_k'(x_i)}\ ,\ \omega_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)\ ,$$

verifique a fórmula de recorrência abaixo:

$$[y_0, y_1, ..., y_k] = \frac{[y_0, y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ...y_k] - [y_0, y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_k]}{x_j - x_i}\ ,\ i \neq j\ .$$

12. Sejam $y = f(x)$ uma função contínua e $x_0, x_1, ..., x_n$ $n+1$ pontos distintos em seu domínio.

   (a) Utilize a diferença dividida $[y_0, y]$, com $x \neq x_0$, para escrever $f(x) = [y_0] + (x-x_0)[y_0, y_1]$

   (b) Utilize a diferença dividida $[y_0, y_1, y]$, com $x \neq x_0, x_1$, para escrever

$$f(x) = [y_0] + (x-x_0)[y_0, y_1] + (x-x_0)(x-x_1)[y_0, y_1, y]$$

   (c) Generalize as expressões anteriores para obter $f(x)$ a partir da diferença dividida $[y_0, ..., y_n, y]$

   (d) A partir da expressão obtida no item anterior, e da fórmula do erro da interpolação polinomial, obtenha

$$[y_0, ..., y_n, y] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ ,\ \xi \in (x_0, x_n)\ .$$