Primeira prova de Cálculo Numérico
Primeiro trimestre de 2012
prof. Rodrigo Fresneda

28 de março de 2012

Avisos:

- Sempre que puder, justifique as passagens efetuadas, demonstrando conhecimento sobre os resultados e teoremas discutidos em sala. Poucas questões bem resolvidas valem mais que muitas mal resolvidas.
- Resolva as questões na ordem que lhe convier, mas indique na folha de resposta a questão e item sendo resolvidos.
- Não é permitida a consulta a material externo, incluindo seu colega.
- Esta prova vale 10,5 pontos.

1. (2 pontos) A representação de ponto flutuante de precisão dupla (64bits) no padrão IEE754 é caracterizada por 1 bit de sinal S, 11 bits para o expoente E, e 52 bits para a fração

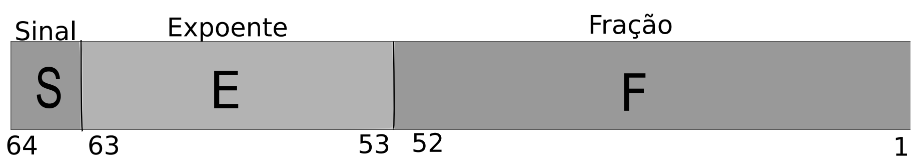

Figura 1: Representação de ponto flutuante em IEE754-64bits

Nessa representação, números normalizados são dados pela fórmula

$$x = (-1)^S * 2^{E-1023} * 1.F$$

em que $0 < E < 2^{11} - 1$ e $0 \leqslant F < 1$. Em relação a esse padrão, responda:

(a) Qual o maior número normalizável (base 10)?

(b) Qual o menor número normalizável (base 10)?

(c) Quanto vale eps?

(d) Represente 0.1 (determine os inteiros S,E e F na base 2).

2. (3.0 pontos) Considere a equação $xe^x - 1 = 0$.

   (a) Encontre um intervalo que contenha uma raiz positiva dessa equação. Para tanto, esboçe um gráfico e use o teorema do anulamento.

   (b) Determine uma função de iteração apropriada ao problema. Justifique sua escolha com base no teorema de convergência do método iterativo linear.

   (c) Utilize a função do item anterior para encontrar a raiz localizada no item (a) com erro inferior a 0.01.

   (d) Escreva uma função de iteração para esse problema tal que a convergência seja mais rápida.

3. (2 pontos) Considere o sistema linear $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

   (a) A matriz A é decomponível no produto LU? Justifique.

   (b) O sistema pode ser resolvido por Cholesky? Justifique.

4. (3.0 pontos) Considere o sistema linear $Ax = b$ onde

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ a & 20 & 1 \\ 1 & a & 6 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Para que valores de a teremos $\|B\|_\infty < 1$, em que B é a matriz de iteração do método de Jacobi?

   (b) Para quais valores de a podemos afirmar que $\left\|x^{(k+1)} - \xi\right\|_\infty \leq \frac{1}{2}\left\|x^{(k)} - \xi\right\|_\infty$, em que $x^{(k+1)}$ e $x^{(k)}$ são aproximações para a solução ξ?

   (c) Resolva o sistema dado pelo método de Jacobi com $a = -1$ e erro relativo inferior a 0.1 na norma do máximo.

5. (0.5 ponto) Mostre que se a matriz de coeficientes A é estritamente diagonal dominante, o critério de Sassenfeld é satisfeito, i.e., $\beta_i < 1$, $i = 1, ..., n$, em que

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$$