

Segunda prova de Cálculo Numérico
Primeiro trimestre de 2012
prof. Rodrigo Fresneda

9 de maio de 2012

Avisos:

- Sempre que puder, justifique as passagens efetuadas, demonstrando conhecimento sobre os resultados e teoremas discutidos em sala. Poucas questões bem resolvidas valem mais que muitas mal resolvidas.
- Resolva as questões na ordem que lhe convier, mas indique na folha de resposta a questão e item sendo resolvidos.
- Não é permitida a consulta a material externo, incluindo seu colega.
- Esta prova vale 10,5 pontos.

1. Considere a tabela

x	-2	-1	1	2
y	1	-3	1	9

(a) Pelo método dos mínimos quadrados, ajuste à tabela as funções:

$$g_1(x) = ax^2 + bx, \quad g_2(x) = cx^2 + d$$

(b) Qual das funções fornece o melhor ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados? Justifique.

2. Suspeita-se que a tabela

x	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
y	-9.0	0.0	1.0	0.0	3.0	16.0

represente um polinômio cúbico.

(a) Como testar esse fato? Explique.

(b) Determine o polinômio interpolador utilizando a fórmula de Newton para pontos igualmente espaçados.

3. Considere a integral:

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{-x} \sin x dx$$

(a) Dados três pontos igualmente espaçados, $x_0 < x_1 < x_2$, deduza a fórmula de Newton-Cotes de um polinômio interpolador do segundo grau que aproxima a integral $\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx$.

(b) Qual o menor espaçamento que devemos utilizar para aproximar I usando a versão generalizada da fórmula do item a) com erro inferior a 10^{-3} ?

(c) Calcule I utilizando a fórmula do item a) adaptada para o número de intervalos determinados no item b). Sua resposta está consistente com o erro que você determinou em b)?

4. Utilize as tabelas no apêndice abaixo para calcular as integrais abaixo por quadratura gaussiana:

(a)

$$\int_1^{\infty} e^{-x} x^2 dx$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{2} x^5 dx$$

5. Mostre que há um único polinômio p de grau n ou menor tal que $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, em que $x_0, \dots, x_n$ são $n+1$ números distintos e $y_0, y_1, \dots, y_n$ são quaisquer.

Formulário

Fórmula do erro na interpolação:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_n$$

Fórmula do erro na integração de Newton-Cotes:

$$R(f) = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n u(u-1) \cdots (u-n) du \text{ para } n \text{ ímpar, } a < \xi < b$$

$$R(f) = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n \left(u - \frac{n}{2}\right) u(u-1) \cdots (u-n) du \text{ para } n \text{ par, } a < \xi < b$$

Polinômios de Legendre $\omega(x) = 1, [a, b] = [-1, 1]$			Polinômios de Chebychev $\omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}, [a, b] = [-1, 1]$		
P_n	raízes	pesos	T_n	zeros	pesos
P_2	± 0.5773502691	0.1000000000×10^1	T_2	± 0.7071067811	0.1570796326×10^1
P_3	± 0.7745966692 0.0000000000	0.5555555555 0.8888888888	T_3	± 0.8660254037 0.0000000000	0.1047197551×10^1 0.1047197551×10^1
P_4	± 0.8611363115 ± 0.3399810435	0.6521451548 0.3478548451	T_4	± 0.9238795325 ± 0.3826834323	0.37853981633 0.37853981633

Polinômios de Laguerre $\omega(x) = e^{-x}, [a, b] = [0, \infty]$			Polinômios de Hermite $\omega(x) = e^{-x^2}, [a, b] = [-\infty, \infty]$		
L_n	zeros	pesos	H_n	zeros	pesos
L_2	0.5857864376 0.3414213562×10^1	0.8535534 0.1464466094	H_2	± 0.7071067811	0.8862269254
L_3	0.4157745567 0.2294280360×10^1 0.6289945082×10^1	0.7110930099 0.278517735 $0.1038925650 \times 10^{-1}$	H_3	$\pm 0.1224744871 \times 10^1$ 0.0000000000	0.2954089751 0.1181635900×10^1
L_4	0.3225476896 0.1745761101×10^1 0.4536620296×10^1 0.9395070912×10^1	0.6031541043 0.3574186924 $0.3888790851 \times 10^{-1}$ $0.5392947055 \times 10^{-3}$	H_4	$\pm 0.1650680123 \times 10^1$ ± 5246476323	$0.8131283544 \times 10^{-1}$ 0.8049140900