Prova substitutiva de Cálculo Numérico
Primeiro trimestre de 2012
prof. Rodrigo Fresneda

Avisos:

- Sempre que puder, justifique as passagens efetuadas, demonstrando conhecimento sobre os resultados e teoremas discutidos em sala. Poucas questões bem resolvidas valem mais que muitas mal resolvidas.
- Resolva as questões na ordem que lhe convier, mas indique na folha de resposta a questão e item sendo resolvidos.
- Não é permitida a consulta a material externo, incluindo seu colega.
- Esta prova vale 10 pontos.

1. Seja ξ uma raiz da equação $f(x) = 0$. Supomos que $f(x)$, $f^{'}(x)$ e $f''(x)$ sejam contínuas e limitadas num intervalo fechado I contendo ξ e que $f'(\xi) = 0$ e $f''(\xi) \neq 0$.

   (a) (1.0 ponto) Mostre que o método iterativo definido por

   $$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_,)}$$

   converge para ξ se $x \in I$.

   (b) (1.0 ponto) O método definido em a) estende-se para uma raiz de multiplicidade m da seguinte maneira:

   $$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

   Calcular a raiz ξ próxima de 1 da equação:

   $$f(x) = x^4 - 3.1x^3 + 2.52x^2 + 0.432x - 0.864 = 0$$

   com erro relativo inferior a 10^{-3}, usando método descrito aqui e sabendo que $f(\xi) = f'(\xi) = f''(\xi) = 0$ e $f'''(\xi) \neq 0$.

2. (2.0 pontos) Seja A uma matriz de ordem n. Podemos encontrar A^{-1}, a inversa de A, resolvendo o conjunto de sistemas lineares

   $$Ax^{(i)} = e^{(i)},\, i = 1, ..., n\,,$$

   em que os vetores $e^{(i)}$ são as colunas da matriz identidade de ordem n e os vetores $x^{(i)}$ são as colunas de A^{-1}. Utilizando decomposição LU, inverta a matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (2.0 pontos) Supomos que o sistema linear

   $$\begin{aligned} x_1 - \alpha x_2 &= c_1 \\ -\alpha x_1 + x_2 - \alpha x_3 &= c_2 \\ -\alpha x_2 + x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

seja resolvido iterativamente pelas fórmulas

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \alpha x_2^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} &= \alpha \left(x_1^{(k)} + x_3^{(k)} \right) + c_2 \\ x_3^{(k+1)} &= \alpha x_2^{(k)} + c_3 \end{aligned}$$

Para que valores de α a convergência do método acima é garantida? Justifique.

4. (2.0 pontos) Ajuste um polinômio de grau 2 ao conjunto de pontos dados na tabela

x	-1	0	1	2
y	0	-1	0	7

, utilizando polinômios ortonormais segundo o produto escalar

$$(p,q) = \sum_{i=0}^{3} p(x_i)\, q(x_i) \ ,$$

em que x_0, x_1, x_2, x_3 são pontos da tabela e $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios de grau no máximo 3.

5. Considere a integral

$$I(a) = \int_0^a x^4 e^{-x} dx$$

(a) (1.0 ponto) Obtenha $I(1)$ com erro inferior a 10^{-2} usando a regra de Simpson 3/8.

(b) (1.0 ponto) Calcule exatamente $I(\infty)$, a menos de erros de arrendondamento, usando quadratura gaussiana.

Formulário

Fórmula do erro na interpolação:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \ , \ x_0 < \xi < x_n$$

Fórmula do erro na integração de Newton-Cotes:

$$R(f) = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n u(u-1)\cdots(u-n)\, du \text{ para } n \text{ ímpar, } a < \xi < b$$

$$R(f) = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n \left(u - \frac{n}{2}\right) u(u-1)\cdots(u-n)\, du \text{ para } n \text{ par, } a < \xi < b$$

Polinômios de Legendre $\omega(x) = 1$, $[a,b] = [-1,1]$		
P_n	raízes	pesos
P_2	± 0.5773502691	0.1000000000×10^1
P_3	± 0.7745966692	0.5555555555
	0.0000000000	0.8888888888
P_4	± 0.8611363115	0.6521451548
	± 0.3399810435	0.3478548451

Polinômios de Chebychev $\omega(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$, $[a,b] = [-1,1]$		
T_n	zeros	pesos
T_2	± 0.7071067811	0.1570796326×10^1
T_3	± 0.8660254037	0.1047197551×10^1
	0.0000000000	0.1047197551×10^1
T_4	± 0.9238795325	0.37853981633
	± 0.3826834323	0.37853981633

Polinômios de Laguerre $\omega(x) = e^{-x}$, $[a,b] = [0,\infty]$		
L_n	zeros	pesos
L_2	0.5857864376	0.8535534
	0.3414213562×10^1	0.1464466094
L_3	0.4157745567	0.7110930099
	0.2294280360×10^1	0.278517735
	0.6289945082×10^1	$0.1038925650 \times 10^{-1}$
L_4	0.3225476896	0.6031541043
	0.1745761101×10^1	0.3574186924
	0.4536620296×10^1	$0.3888790851 \times 10^{-1}$
	0.9395070912×10^1	$0.5392947055 \times 10^{-3}$

Polinômios de Hermite $\omega(x) = e^{-x^2}$, $[a,b] = [-\infty,\infty]$		
H_n	zeros	pesos
H_2	± 0.7071067811	0.8862269254
H_3	$\pm 0.1224744871 \times 10^1$	0.2954089751
	0.0000000000	0.1181635900×10^1
H_4	$\pm 0.1650680123 \times 10^1$	$0.8131283544 \times 10^{-1}$
	± 5246476323	0.8049140900