Gabarito da primeira prova de bases matemática turma A

8 de agosto de 2017

1. Siga o roteiro indicado abaixo.

   (a) Primeiro, mostre que se a e b são números racionais, então $a + b$ é um número racional.

   (b) Segundo, prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

   (c) Terceiro, assumindo que as proposições expressas nos itens anteriores sejam verdadeiras, é possível afirmar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é irracional?

   (a) Sejam a e b racionais. Então existem inteiros r_1, s_1, r_2 e s_2, com $s_1 \neq 0$ e $s_2 \neq 0$, tais que $a = r_1/s_2$ e $b = r_2/s_2$. Logo,

$$a + b = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} = \frac{r}{s},$$

   onde $r = r_1 s_2 + r_2 s_1 \in \mathbb{Z}$ e $s = s_1 s_2 \in \mathbb{Z}^*$. Logo, $a + b \in \mathbb{Q}$.
   (b) Vamos provar por absurdo. Suponha que existam $r, s \in \mathbb{Z}$, com $s \neq 0$, tal que $\sqrt{2} = r/s$ seja uma fração irredutível. Logo, $2 = r^2/s^2$, ou equivalentemente, $r^2 = 2s^2$. Portanto, r^2 é par, o que implica que r é par, isto é, $r = 2k$, para $k \in \mathbb{Z}$. Então $r^2 = 4k^2 = 2s^2 \implies s^2 = 2k^2$. Logo, s^2 é par, e portanto s é par. Como r e s são ambos pares, r/s não é irredutível. Absurdo.
   (c) A contrapositiva do item (a) é: se $a + b$ é irracional, então a é irracional ou b é irracional, o que não nos permite afirmar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ seja irracional, mesmo que $\sqrt[3]{2}$ o seja. De fato, considere $a = 2 + \sqrt{2}$ e $b = 2 - \sqrt{2}$, ambos irracionais. Evidentemente, $a + b$ não é irracional.

2. Siga o roteiro indicado abaixo.

   (a) Prove $\wp(A) \cup \wp(B) \subset \wp(A \cup B)$, em que A e B são conjuntos quaisquer.

   (b) Sejam $A \subset \mathbb{N}$ e $B \subset \mathbb{N}$ tais que $\wp(A) \cup \wp(B) \subset \{X \subset \mathbb{N} | 1 \notin X\}$. Dê um contra-exemplo para $\wp(A \cup B) \subset \wp(A) \cup \wp(B)$ nesse contexto.
   (a)Seja $x \in \wp(A) \cup \wp(B)$. Então $x \in \wp(A)$ ou $x \in \wp(B)$. Se $x \in \wp(A)$, então $x \subset A \implies x \subset A \cup B \implies x \in \wp(A \cup B)$. Analogamente, se $x \in \wp(B)$, então $x \in \wp(A \cup B)$. Assim, se $x \in \wp(A) \cup \wp(B)$, então $x \in \wp(A \cup B)$.
   (b)Considere $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $B = \mathbb{N} \setminus \{2\}$. Então $A \cup B = \mathbb{N}$. Assim, $\mathbb{N} \in \wp(A \cup B)$, mas $\mathbb{N} \notin \wp(A)$ e $\mathbb{N} \notin \wp(B)$, assim $\mathbb{N} \notin \wp(A) \cup \wp(B)$.

3. Fazendo referência aos axiomas de corpo ordenado que se encontram no anexo dessa prova, justifique as passagens utilizadas na seguinte demonstração: Dados $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, vale $(-x)\,y = -\,(xy)$ e $(-x)\,(-y) = xy$. Demonstração: temos $(-x)\,y + xy = (-x+x)\,y = 0y = 0$. Logo, $-\,(xy) = (-x)\,y$. Trocando y por $-y$ na última expressão, temos $(-x)\,(-y) = -\,(x\,(-y)) = -\,(-\,(xy)) = xy$.
(a) Usando D, $(-x)\,y + xy = (-x+x)\,y$. Por $A5$, $(-x+x)\,y = 0y$. Usando $0y = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, temos $(-x)\,y + xy = 0$. Logo, por $A5$ $-\,(xy) = (-x)\,y$.
(b) Usando a propriedade provada no item (a), $(-x)(-y) = -(x(-y))$. Usando $M2$, $-(x(-y)) = -((-y)x)$ e novamente a popriedade do item (a), $-((-y)x) = -(-(yx))$. Finalmente, por $M2$, $-(-(yx)) = -(-(xy))$. Como $-\,(-x) = x$ para todo x, $(-x)\,(-y) = -\,(-\,(xy)) = xy$.
obs: $-x = (-1)\,x$ não é um axioma, segue da propriedade demonstrada no exercício. De fato, $x = 1 \cdot x$ (M4). Então $-x = -\,(1 \cdot x)$. Usando a propriedade $(-x)\,y = -\,(xy)$, temos $-\,(1 \cdot x) = (-1)\,x$, e portanto $-x = (-1)\,x$.

4. Siga o roteiro indicado:

   (a) Se $X_1 = \{x | p_1(x)\}$ e $X_2 = \{x | p_2(x)\}$, prove que $(X_1 \cup X_2)^c = X_1^c \cap X_2^c$ utilizando tabela verdade.

   (b) Prove por indução que $(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)^c = X_1^c \cap X_2^c \cap \cdots \cap X_n^c$.
   (a) Temos $X_1 \cup X_2 = \{x | p_1(x) \vee p_2(x)\}$. Pela tabela verdade, $\sim (p_1(x) \vee p_2(x)) \Leftrightarrow \sim p_1(x) \wedge \sim p_2(x)$. Então,

$$
\begin{aligned}
(X_1 \cup X_2)^c &= \{x | \sim (p_1(x) \vee p_2(x))\} = \{x | \sim p_1(x) \wedge \sim p_2(x)\} \\
&= \{x | \sim p_1(x)\} \cap \{x | \sim p_2(x)\} \\
&= X_1^c \cap X_2^c
\end{aligned}
$$

   (b) O caso base foi demonstrado em (a) $n = 2$. Assuma que $(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)^c = X_1^c \cap X_2^c \cap \cdots \cap X_n^c$. Então

$$(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup X_{n+1})^c = ((X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) \cup (X_{n+1}))^c$$

   Por (a), e usando associatividade de $\cup$,

$$((X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) \cup (X_{n+1}))^c = (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)^c \cap X_{n+1}^c$$

   Usando a hipótese de indução,

$$(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)^c \cap X_{n+1}^c = X_1^c \cap X_2^c \cap \cdots \cap X_n^c \cap X_{n+1}^c\,.$$

   Logo, a propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.