Gabarito da primeira prova de bases matemática turma B

8 de agosto de 2017

1. Siga o roteiro indicado abaixo:

   (a) Primeiro prove a seguinte proposição: Se n^3 é par, então n é par.

   (b) Segundo, use o resultado do item acima para mostrar que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

   (c) Assumindo o resultado expresso no item anterior, é possível afirmar que o supremo do conjunto $A = \left\{q \in \mathbb{Q}_+ | q^3 < 2\right\}$ existe nos reais $\mathbb{R}$? Justifique com base em teoremas vistos em sala de aula.
   (a)Vamos provar a contrapositiva: se n é ímpar, então n^3 é ímpar. Se n é ímpar, então pode ser escrito na forma $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $n^3 = (2k+1)^3 = 2\left(4k^3 + 6k^2\right) + 1$. Como $4k^3 + 6k^2 \in \mathbb{Z}$, n^3 é ímpar.
   (b)Vamos provar por redução ao absurdo. Suponha que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$. Então é da forma $\sqrt[3]{2} = p/q$, irredutível, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Então $p^3 = 2q^3$, e assim p^3 é par, e pelo item (a), p é par. Assim, p é da forma $p = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo, $2q^3 = 8k^3 \Rightarrow q^3 = 2(2k^3)$.Como $2k^3 \in \mathbb{Z}$, q^3é par, e assim q é par. Logo, p e q são pares, portanto têm um divisor comum 2, e entramos em contradição com p/q ser irredutível.
   (c) O conjunto A é não-vazio, pois $0 \in A$. Além disso, o conjunto A é limitado superiormente, pois, por exemplo, $2 \in \mathbb{Q}_+$ é uma cota superior. Pelo axioma de completude, existe $s = \sup A$, o supremo de A, pertencente aos reais. De fato, chamamos $s = \sqrt[3]{2}$.

2. Siga o roteiro indicado abaixo.

   (a) Prove $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$, em que A e B são conjuntos quaisquer.

   (b) Sejam $A \subset \mathbb{N}$ e $B \subset \mathbb{N}$ tais que $\wp(A) \cap \wp(B) = \{X \subset \mathbb{N} | 1 \notin X\}$. Determine as condições sobre A e B de modo que $A \neq B$. Você pode assumir a propriedade expressa no item anterior.
   (a)$x \in \wp(A) \cap \wp(B) \Leftrightarrow (x \in \wp(A)) \wedge (x \in \wp(B)) \Leftrightarrow (x \subset A) \wedge (x \subset B) \Leftrightarrow x \subset A \cap B \Leftrightarrow x \in \wp(A \cap B)$.
   (b) Considere $C = A \cap B$. Então, por (a), $\wp(C) = \{X \subset \mathbb{N} | 1 \notin X\}$. Assim, C contem como subconjuntos todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ que não contêm a unidade. Assim, $\mathbb{N} \backslash \{1\} \subset C$. Por outro lado, os subconjuntos de C são aqueles que não contêm a unidade, portanto $C = \mathbb{N} \backslash \{1\}$. Desse modo, temos $A \cap B = \mathbb{N} \backslash \{1\}$. Podemos ter, portanto, $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{N} \backslash \{1\}$ ou $A = \mathbb{N} \backslash \{1\}$ e $B = \mathbb{N}$.

3. Fazendo referência aos axiomas de corpo ordenado que se encontram no anexo dessa prova, justifique as passagens utilizadas na demonstração de: se $x \neq 0$, então $x^2 > 0$. Em particular, $1 > 0$. Demonstração: se $x > 0$, então $x^2 = x \cdot x > 0$. Se $x < 0$, então $(-x)(-x) > 0$. Como $x^2 = (-x)(-x)$, então $x^2 > 0$. Como $1 \neq 0$, $1^2 > 0$. Mas $1^2 = 1$. Então $1 > 0$.
(a) Na implicação "se $x > 0$, então $x^2 = x \cdot x > 0$" usamos $R2$ com $y = x$.
(b) Por $R2$, com $x < 0$, $x + (-x) < -x + 0$. Assim, $-x + 0 > 0 = x + (-x)$, onde usamos $A5$. Por $A4$, $-x + 0 = -x > 0$. Pela propriedade demonstrada em (a), temos $(-x)^2 > 0$.
(c) De $M4$, temos $1 \neq 0$, e de (b) e (c) segue que $1^2 > 0$. Por outro lado, de $M4$, $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$. Logo, $1 > 0$.

4. Siga o roteiro indicado:

   (a) Se $X = \{x|p(x)\}$, $X_1 = \{x|p_1(x)\}$ e $X_2 = \{x|p_2(x)\}$, prove que $X \cap (X_1 \cup X_2) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2)$ utilizando tabela verdade.

   (b) Prove por indução que $X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \cdots \cup (X \cap X_n)$.
   (a)Temos $X_1 \cup X_2 = \{x|p_1(x) \vee p_2(x)\}$. Logo, $X \cap (X_1 \cup X_2) = \{x|p(x) \wedge (p_1(x) \vee p_2(x))\}$. Pela tabela verdade,

$$p(x) \wedge (p_1(x) \vee p_2(x)) \Leftrightarrow (p(x) \wedge p_1(x)) \vee (p(x) \wedge p_2(x))$$

   Assim, $X \cap (X_1 \cup X_2) = \{x| (p(x) \wedge p_1(x)) \vee (p(x) \wedge p_2(x))\} = \{x|p(x) \wedge p_2(x)\} \cup \{x|p(x) \wedge p_1(x)\} = X \cap (X_1 \cup X_2) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2)$
   (b)No item (a) provamos o caso base. Agora vamos assumir a hipótese de indução, de que vale

$$X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \cdots \cup (X \cap X_n) .$$

   Então, por associatividade de $\cup$, temos $X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{n+1}) = X \cap ((X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) \cup (X_{n+1}))$. Por (a), temos

$$X \cap ((X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) \cup (X_{n+1})) = (X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)) \cup (X \cap X_{n+1})$$

   Pela hipótese de indução,

$$(X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n)) \cup (X \cap X_{n+1}) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \cdots \cup (X \cap X_n) \cup (X \cap X_{n+1}) .$$

   Logo, a propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.