# Segunda prova de Bases Matemáticas

prof. Rodrigo Fresneda

18 de agosto de 2017

Avisos:

- Sempre que puder, justifique as passagens efetuadas, demonstrando conhecimento sobre os resultados e teoremas discutidos em sala. Poucas questões bem resolvidas valem mais que muitas mal resolvidas.
- Resolva as questões na ordem que lhe convier, mas indique na folha de resposta a questão e item sendo resolvidos.
- Não é permitida a consulta a material externo ou colega, nem o uso de calculadora ou celular.

1. Faça o que é pedido.

   (a) Defina precisamente $\lim_{x\to p^+} f(x) = L$

   (b) Determine $L$ de modo que a função dada seja contínua no ponto $x = 3$:

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6} & se\ x \neq 3 \\ L & se\ x = 3 \end{cases}$$

   (a)Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in Dom f$, se $p < x < p + \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$
   (b) Devemos ter $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = L$. Temos

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} f(x) &= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{(x-3)(x-2)}\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{(x-3)(x-2)}\frac{1}{\sqrt{x^2+7}+4}\right) \\ &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3}{x-2}\frac{1}{\sqrt{x^2+7}+4}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x^2+7}+4} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

   onde usamos a propriedade de produto de limites e continuidade da função racional $\frac{x+3}{x-2}$ e da função $\frac{1}{\sqrt{x^2+7+4}}$. Assim, devemos ter $L = \frac{3}{4}$.

2. Calcule os limites abaixo, justificando as passagens smpre que necessário:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

   (b) $\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2}$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$

(d) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $f(x) = x^3$

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left( \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \left( \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \left[ \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1+\cos x} \right]$$
$$= \lim_{x\to 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \left( \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\,,$$

onde usamos a propriedade de produto de limites, o primeiro limite fundamental e continuidade da função $\cos x$.

(b) Como $\left|\sin \frac{1}{x^2}\right| \leq 1$, $\left|x^2 \sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2$. Então $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$. Como $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, pelo teorema do confronto, $\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0$.

(c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\lim_{x\to\infty} \frac{10}{x^3}}} = 1\,,$$

pois $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ e $\sqrt{x}$ é contínua.

(d)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\left((x+h)^2 + (x+h)\,x + x^2\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left((x+h)^2 + (x+h)\,x + x^2\right) = 3x^2\,,$$

onde usamos continuidade de polinômios.

3. Dada as funções $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = tg(x)$, determine o domínio de $g \circ f$ e esboçe seu gráfico.

(a) Temos $g(f(x)) = g(|x|) = tg(|x|)$. Como $Dom g = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, e $Im f = \mathbb{R}_+$, temos $Dom(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

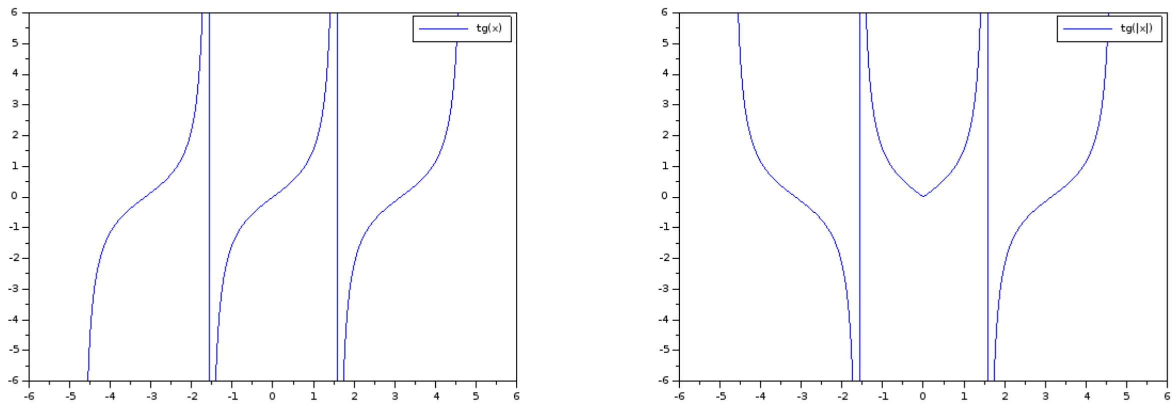


Figura 1: Gráfico de $\tan x$ e de $\tan(|x|)$

4. Considere a equação $\arcsin x = \sqrt{x}$.

   (a) Desenhe os gráficos de $\arcsin x$ e $\sqrt{x}$ no intervalo $[0, 1]$.

   (b) Com base nos teoremas vistos em sala de aula, a equação do enunciado tem uma raiz no intervalo $(0, 1)$?

   (c) E quanto ao intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$? Considere $\sqrt{2} \simeq 1.4$.
   (a)

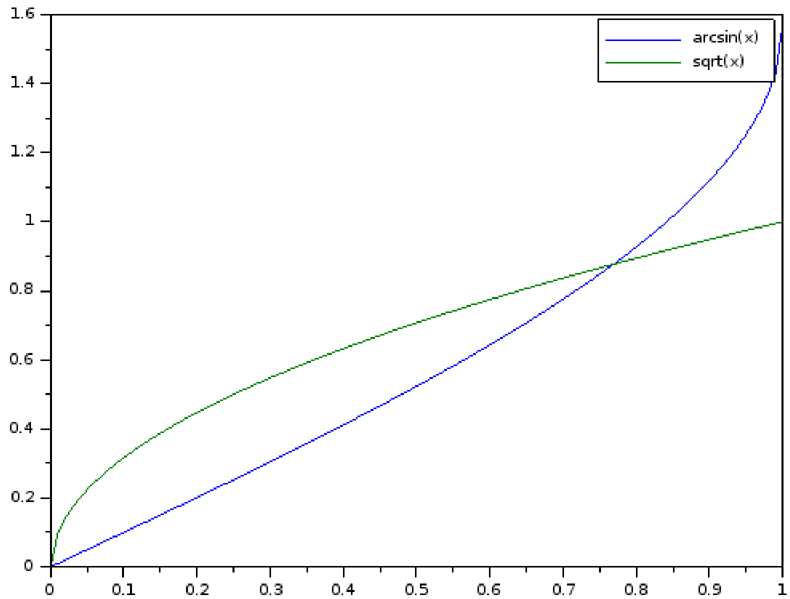


Figura 2: Gráfico de $\arcsin x$ e de $\sqrt{x}$

(b) Para $f(x) = \arcsin x - \sqrt{x}$, temos $f(0) = \arcsin 0 = 0$ e $f(1) = \arcsin 1 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$. Embora a função seja contínua em $[0,1]$, como a $f(x)$ não tem sinais opostos em 0 e 1, não é possível aplicar o teorema do anulamento. Com tanto mais razão, como $0 \notin (f(0), f(1)) = \left(0, \frac{\pi}{2} - 1\right)$, pelo TVI não é possível afirmar que exista $x \in (0,1)$ tal que $f(x) = 0$.

(c) Nesse caso, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 3\sqrt{2}}{6} < 0$. Assim, $f(x)$ troca de sinal em $1/2$ e 1, e portanto, pelo teorema do anulamento, existe $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tal que $f(x) = 0$, ou, o que é equivalente, $\arcsin x = \sqrt{x}$. Ou ainda, pelo TVI, como $0 \in \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right]$, então existe $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tal que $f(x) = 0$.