Primeira prova de Bases Matemáticas

prof. Rodrigo Fresneda

18 de agosto de 2017

Avisos:

- Sempre que puder, justifique as passagens efetuadas, demonstrando conhecimento sobre os resultados e teoremas discutidos em sala. Poucas questões bem resolvidas valem mais que muitas mal resolvidas.
- Resolva as questões na ordem que lhe convier, mas indique na folha de resposta a questão e item sendo resolvidos.
- Não é permitida a consulta a material externo ou colega, nem o uso de calculadora ou celular.

1. Faça o que é pedido.

   (a) Defina continuidade de uma função real em um ponto.

   (b) Deteremine L de modo que a função dada seja contínua no ponto $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2+3x-4} & se\ x \neq 1 \\ L & se\ x = 1 \end{cases}$$

   (a) $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em $p \in A$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$, se $|x - p| < \delta$, então $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.
   (b) Devemos ter $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = L$. Temos

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+4} = \frac{3}{5}\,,$$

   em que utilizamos continuidade de funções racionais. Assim, devemos ter $L = \frac{3}{5}$.

2. Calcule os limites abaixo, justificando as passagens sempre que necessário :

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

   (b) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x}$

   (c) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $f(x) = \frac{1}{x}$

   (d) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$

   (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x} \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos^2 x}{x} \frac{1}{1+\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \left[x \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1+\cos x} \right]$$
$$= \lim_{x\to 0} x \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0\,,$$

em que usamos a propriedade limite do produto, continuidade da função identidade, da função cosseno, e o limite fundamental.
(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\sin x\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\sin x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}\sin x}{1-\frac{1}{x}\sin x} = \frac{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x}{1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x} = 1$$

onde usamos $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ e o teorema do confronto: basta fazer $y = 1/x$ para obter o limite equivalente

$$\lim_{y\to 0} y \sin\frac{1}{y} = 0\,.$$

(c)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{-h}{x(x+h)} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}\,,$$

onde usamos que a continuidade de funções racionais.
(d)

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{(x-3)(x-2)}\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{(x-3)(x-2)}\frac{1}{\sqrt{x^2+7}+4}\right)$$
$$= \lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3}{x-2}\frac{1}{\sqrt{x^2+7}+4}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x^2+7}+4} = \frac{3}{4}\,,$$

onde usamos a propriedade de produto de limites e continuidade da função racional $\frac{x+3}{x-2}$ e da função $\frac{1}{\sqrt{x^2+7}+4}$.

3. Dada as funções $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x-1$, e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \arccos(x)$, determine o domínio de $g \circ f$ e esboçe seu gráfico.
(a) Temos $g(f(x)) = g(x-1) = \arccos(x-1)$. Como $domg = [-1,1]$, devemos ter $-1 \leq x-1 \leq 1$, ou, $0 \leq x \leq 2$, pois assim $Imf \subset Domg$. Logo, $Dom(g \circ f) = [0,2]$.

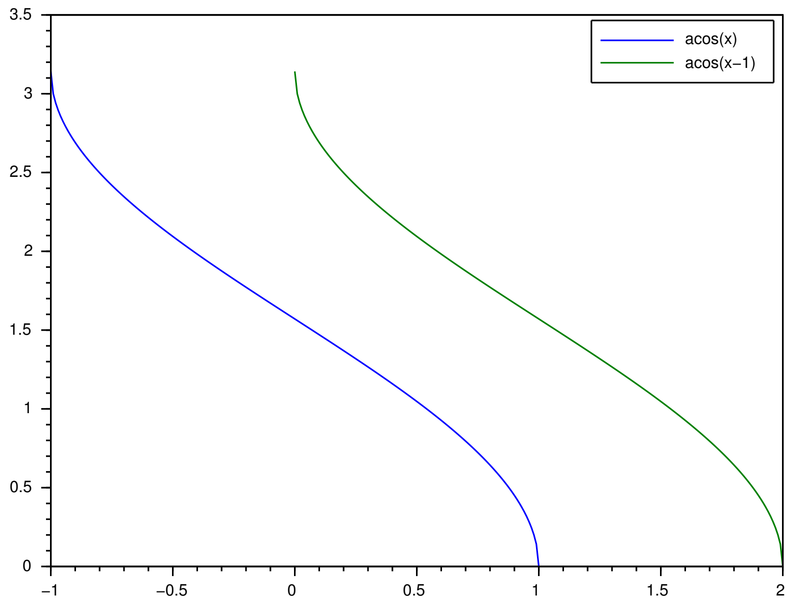

Figura 1: Gráfico de $\arccos(x)$ e $\arccos(x-1)$

4. Considere a equação $\ln x = e^{-x}$.

   (a) Desenhe os gráficos de $\ln x$ e e^{-x} no intervalo $(0, e)$.

   (b) Com base nos teoremas vistos em sala de aula, a equação do enunciado tem uma raiz no intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$?

   (c) E quanto ao intervalo $(1, e)$?
   (a)

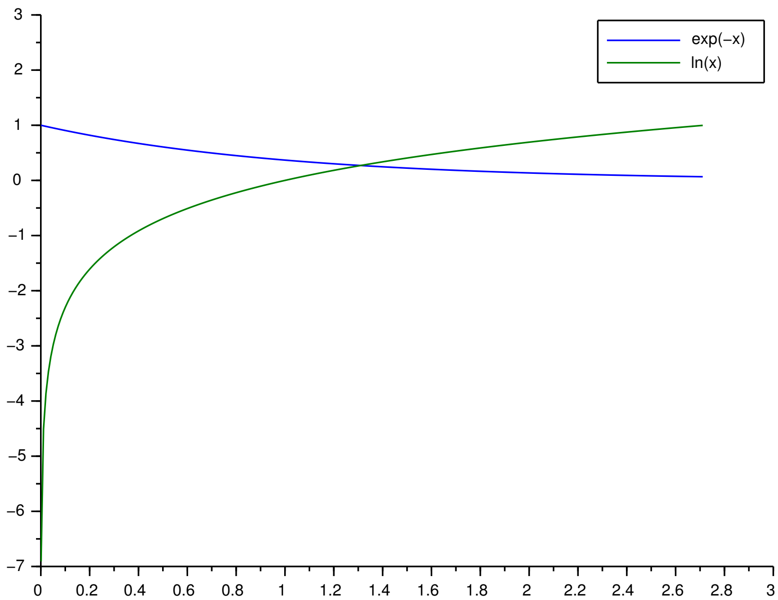

Figura 2: Gráfico de e^{-x} e $\ln x$

(b) Consideremos $f(x) = \ln x - e^{-x}$. É uma função contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Temos $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} = -\ln 2 - e^{-\frac{1}{2}} < 0$, e $f(1) = \ln 1 - e^{-1} = -e^{-1} < 0$. Como a função não troca de sinal em $\frac{1}{2}$ e 1, não é possível usar o teorema do anulamento. Também não é possível usar o TVI, pois $0 \notin \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right]$.
(c) Nesse caso $f(e) = \ln e - e^{-e} = 1 - \frac{1}{e^e}$. Como $e > 0$ e e^x é crescente, $e^e > e^0 = 1$, e assim $e^{-e} < 1$, o que nos dá $f(e) > 0$. Logo, pelo teorema do anulamento, existe $x \in (1, e)$ tal que $f(x) = 0$, ou equivalentemente, $\ln x = e^{-x}$. Pelo TVI, como $0 \in [f(1), f(e)]$, existe $x \in (1, e)$ tal que $f(x) = 0$.