ANÁLISE DE ALGORITMOS

RONALDO CRISTIANO PRATI

BLOCO A, SALA 513-2

RONALDO.PRATI@UFABC.EDU.BR

O QUE É UM ALGORITMO?

- Um conjunto de regras bem definidas que:
  - recebem uma **entrada**
  - produzem uma **saída**
- É uma ferramenta para resolver um problema de maneira sistemática:
  - calcular o produto de dois números
  - ordenar um conjunto de itens
  - encontrar o menor caminho entre uma origem e um destino

O QUE É UM ALGORITMO?

- Consideramos que todo problema possui uma entrada e uma saída bem definidas.
- Dizemos que um algoritmo está **correto** (ou que ele resolve o problema em questão) se para qualquer caso de entrada do problema, ele produz a saída correta.
- Iremos sempre supor que a entrada recebida por um algoritmo satisfaz as restrições definidas na descrição do problema.

O QUE É UM ALGORITMO?

- Exemplo: se o problema é ordenar um conjunto de inteiros, um algoritmo estará correto se e somente se for capaz de ordenar qualquer conjunto de inteiros.
  - Se houver algum número real ou imaginário, por exemplo, dentre o conjunto de números, o algoritmo não necessariamente irá ordená-los.

POR QUE ESTUDAR ALGORITMOS?

- Algoritmos (juntamente com estruturas de dados) são muito importantes em praticamente todas as áreas da Ciência da Computação
  - Roteamento, criptografia, computação gráfica, banco de dados, ...
- Permite inovação tecnológica, superando até mesmo o avanço exponencial da lei de Moore.
  - Google PageRank, Projeto Genoma Humano, ...

POR QUE ESTUDAR ALGORITMOS?

- Auxilia com novos pontos de vista em outras áreas.
  - Economia, evolução, mecânica quântica, ...
- Desafiador e divertido.
  - Exige muita criatividade, raciocínio lógico e capacidade analítica

POR QUE ESTUDAR ALGORITMOS?

Suponha que os computadores fossem infinitamente rápidos e que a memória do computador fosse gratuita. Você teria alguma razão para estudar algoritmos? A resposta é sim, se não por outra razão, pelo menos porque você ainda gostaria de demonstrar que o método da sua solução termina, e o faz com a resposta correta. (Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Stein, C.)

O QUE É ANÁLISE DE ALGORITMOS?

- Objetiva prever o comportamento/desempenho de um algoritmo sem ter que implementá-lo.
- Esse comportamento envolve o uso de recursos como memória, largura de banda e tempo.
- Análise da corretude.

O QUE É ANÁLISE DE ALGORITMOS?

- Uma vez que descrevemos um algoritmo para um problema, existem três principais perguntas que **sempre** devemos fazer:
    1. O algoritmo está **correto**?
    2. Quantos **recursos** o algoritmo consome?
    3. É possível fazer **melhor**?

O ALGORITMO ESTÁ CORRETO?

- A corretude de um algoritmo pode ser afirmada quando se diz que o algoritmo é correto com respeito à determinada especificação (isto é, para cada entrada ele produz a saída esperada).
  - corretude parcial: se o algoritmo retornar uma resposta, ela deve estar correta
  - corretude total: que requer que o algoritmo tenha um fim

QUANTOS RECURSOS O ALGORITMO CONSOME?

- Descrever o comportamento em função do tamanho da entrada, contando o número de *passos básicos* ou *unidades de memória* que são consumidos pelo algoritmo.
  - Pior caso
  - Caso médio

É POSSÍVEL FAZER MELHOR?

- Esse algoritmo é a melhor maneira de resolver o problema, ou existem abordagens que consomem menos recursos?
  - É possível encontrar um algoritmo que requer um menor número de *passos básicos* ou *unidades de memória* para o problema?
  - Qual é menor quantidade de recursos necessários para resolver um problema, e o quão longe estamos dela?

EXEMPLO: MULTIPLICAÇÃO

- Antes de discutir a teoria e ferramentas para responder essas perguntas, vamos ver o exemplo do algoritmo de mutliplicação de dois números que aprendemos no ensino fundamental:
  - multiplicar o multiplicando (X) pelo multiplicador (Y), dígito por dígito, adicionando os resultdos com os deslocamentos adequados

EXEMPLO: MULTIPLICAÇÃO

Seja $x = 1234$ e $y = 5678$, então:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 & & & \times & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & & & 2 & 2 & 7 & 1 & 2 \\
 & & 1 & 7 & 0 & 3 & 4 & 0 \\
 & 1 & 1 & 3 & 5 & 6 & 0 & 0 \\
+ & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 7 & 0 & 0 & 6 & 6 & 5 & 2
\end{array}
$$

ALGORTIMO

- Vamos ver uma implementação dessa ideia em python.
- Só podemos multiplicar dígitos
- Usaremos as funções auxiliares para transformar um número em uma lista de dígitos, e vice-versa

```
def digitos(x):
    d = [ int(a) for a in str(x) ]
    d.reverse()
    return d

def inteiro(digitos):
    return sum( [ 10**(len(digitos)-i-1)*digitos[i] for i in range(len(digitos))])
```

ALGORTIMO

Uma possível implementação:

```
def multiplicaFundamental( X, Y ): # X e Y são inteiros
    x = digitos(X)
    y = digitos(Y)
    parcelas = [] # multiplicação por cada dígito
    for deslocamento,xDigito in enumerate(x):
        parcial = [0 for i in range(deslocamento)]  # 0s de deslocamento
        transporte = 0
        for yDigito in y:
            produto = digitos( xDigito * yDigito + transporte )
            parcial.insert( 0, produto[0] )
            transporte =  produto[1] if len(produto) > 1 else 0
        parcial.insert(0, transporte)
        parcelas.append(inteiro(parcial))
    return sum(parcelas)
```

O ALGORITMO ESTÁ CORRETO?

- Para qualquer entrada que ele recebe, ele devolve a saída esperada?
- Seja $x = x_{n-1} \ldots x_1 x_0$, em que x_i é um dígito de de 0 a 9. Note que o algoritmo calcula:

$$\sum_{i=0}^{n-1} y \times x_i \times 10^i$$

  o que equivale exatamente a $x \times y$
- Como não fizemos nenhuma suposição sobre x, y ou n, a análise acima indica que o algoritmo está correto

QUANTOS RECURSOS O ALGORITMO CONSOME?

- Vamos considerar o consumo de tempo (podemos modificar ligeiramente o algoritmo para mantar a soma parcial a cada dígito, mantendo o consumo de memória constante).
- Uma ideia inicial seria fazer várias simulações com diferentes valores de x e y, e medir o tempo
  - Desvantagens
    - Depende de características do ambiente em que é executado
    - Não permite comparações genéricas com algoritmos que foram testados em outros ambientes
    - Não permite um estudo teórico/analítico sobre o algoritmo

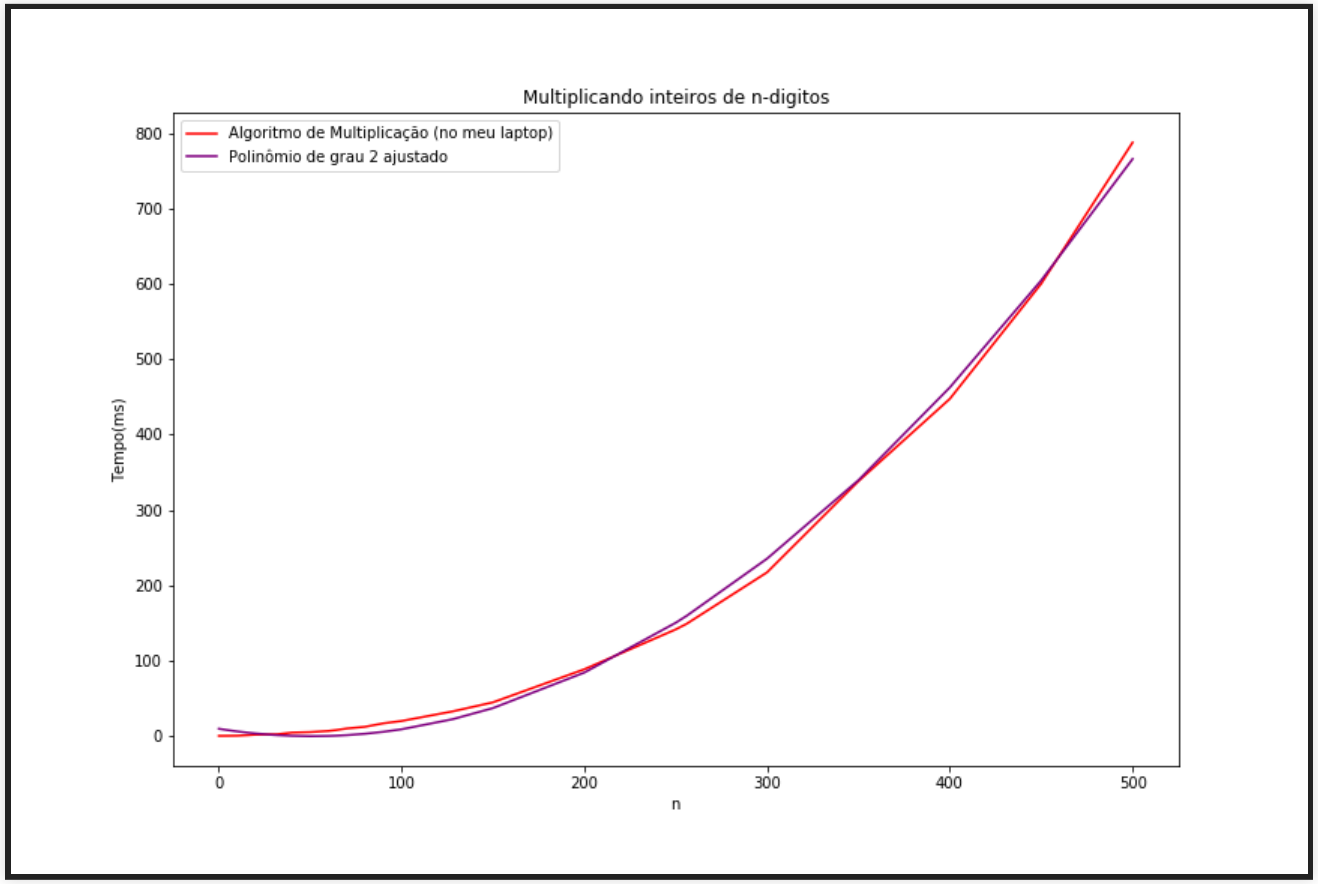
QUANTOS RECURSOS O ALGORITMO CONSOME?

- Como mencionado, nos preocupamos com o número de **passos básicos** realizados
- Note que no algoritmo de multiplicação, para obter o primeiro produto parcial ($y \times x_0$) precisamos de n multiplicações de 1 dígito, e talvez $n-1$ somas para o transporte. Isto é, no máximo $2n$ operações básicas (soma e multiplicação de 1 digito).
- O mesmo raciocínio se aplica para todos os dígitos de x_i de x, isto é, no máximo $2n^2$ operações.
- Analogamente, a soma final consome no máximo outras $2n^2$ operações.

QUANTOS RECURSOS O ALGORITMO CONSOME?

- Podemos concluir que o algoritmo consome cn^2 operações básicas, em que c é uma constante que independe do número de dígitos n.
- Dizemos que o algoritmo tem um tempo de execução $O(n^2)$ (veremos com mais detalhes mais adiante no curso)
- *PERGUNTA:* O que acontece se o tamanho da entrada (o número de dígitos) dobra? E se quadruplica?

QUANTOS RECURSOS O ALGORITMO CONSOME?



DÁ PRA FAZER MELHOR ?

- É possível encontrar $x \times y$ com menos do que cn^2 operações básicas?
- Até agora, talvez você nunca tenha pensado nisso, mas aresposta é **sim**!
- Existem algoritmos melhores do que esse que aprendemos no colégio.

EXEMPLO

Seja $x = 1234$ e $y = 5678$. Vamos dividir os dígitos desses números tal que $x = \underbrace{12}_{a}\ \underbrace{34}_{b}, y = \underbrace{56}_{c}\ \underbrace{78}_{b}$

- (1) Calcular $a \cdot c = 672$
- (2) Calcular $b \cdot d = 2652$
- (3) Calcular $(a + b)(c + d) = 134 \cdot 46 = 6164$
- (4) Calcular $(3) - (2) - (1) = 2840$
- Calcular $(1) \cdot 10^4 + (2) + (4) \cdot 10^2 = 6720000 + 2652 + 284000 = 7006652 = 1234 \cdot 5678$

EXEMPLO

- Por que funciona?
  - Seja $x = 10^{\frac{n}{2}}a + b, y = 10^{\frac{n}{2}}c + d$
  - Então:

$$\begin{aligned} xy &= (10^{\frac{n}{2}}a + b)(10^{\frac{n}{2}}c + d) \\ &= 10^n \underbrace{ac}_{(1)} + 10^{\frac{n}{2}} \underbrace{(ad + bc)}_{(?)} + \underbrace{db}_{(2)} \end{aligned}$$

EXEMPLO

- Para caucular o termo $(ad + bc)$ mais eficientemente, podemos usar a *truque de Gauss*:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$\therefore (ad + bc) = \underbrace{\underbrace{(a+b)(c+d)}_{(3)} - \underbrace{ac}_{(1)} - \underbrace{bd}_{(2)}}_{(4)}$$

- Como já teríamos que calcular (2) e (1) de qualquer maneira, reduzimos o número de computações para calcular $(ab + bc)$ calculando (3) e subraindo (2) e (1).

ALGORITMO DE KARATSUBA

- O algoritmo de Karatsuba aplica a idea recursivamente:
  1. Recursivamente calcule ac
  2. Recursivamente calcule bd
  3. Recursivamente calcule $(a+b)(c+d)$
  4. Cacular e retornar

$$x \cdot y = 10^n \underbrace{ac}_{(1)} + 10^{\frac{n}{2}} (\underbrace{(a+b)(c+d)}_{(3)} - \underbrace{ac}_{(1)} - \underbrace{db}_{(2)}) + \underbrace{db}_{(2)}$$

- O caso base da recursão é quando os números a multiplicar só tem 1 dígito.
- Requer 3 multiplicações recursivas e algumas adições em cada chamada

ALGORITMO DE KARATSUBA

- O algoritmo de Karatsuba calcula recursivamente

$$\begin{aligned} xy &= (10^{\frac{n}{2}}a + b)(10^{\frac{n}{2}}c + d) \\ &= 10^n ac + 10^{\frac{n}{2}}(ad + bc) + db \end{aligned}$$

- Para um único passo, claramente essa expressão é equivalente a xy. - É possível provar por indução em n que o algoritmo está correto (experimente fazer como exercício).

ALGORITMO DE KARATSUBA

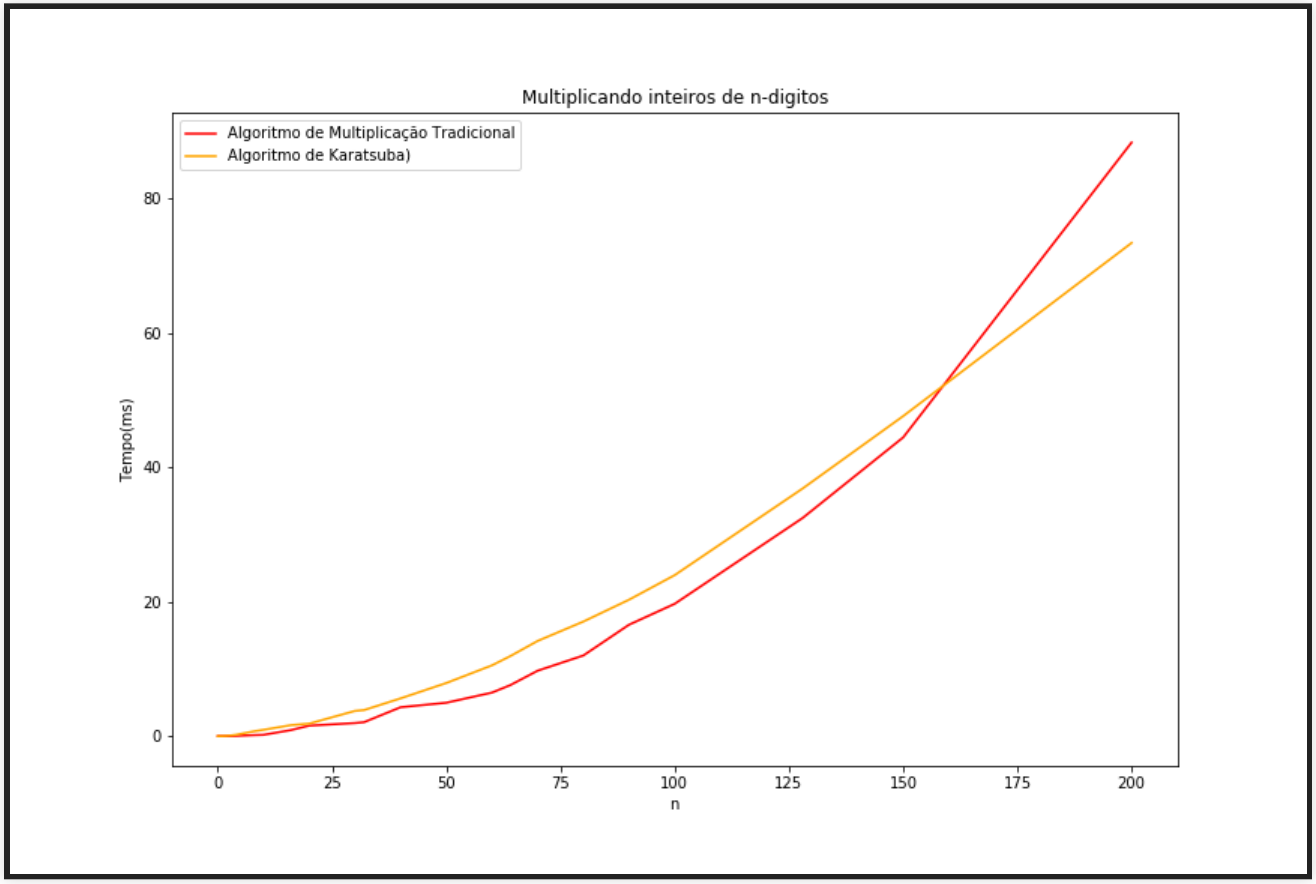
ALGORITMO DE KARATSUBA

```
def digitos(x):
    return [ int(a) for a in str(x) ]

def inteiro(digitos):
    return sum( [ 10**(len(digitos)-i-1)*digitos[i] for i in range(len(digitos))])

def karatsuba( X, Y ):
    return karatsuba_recursivo( digitos(X), digitos(Y))
```

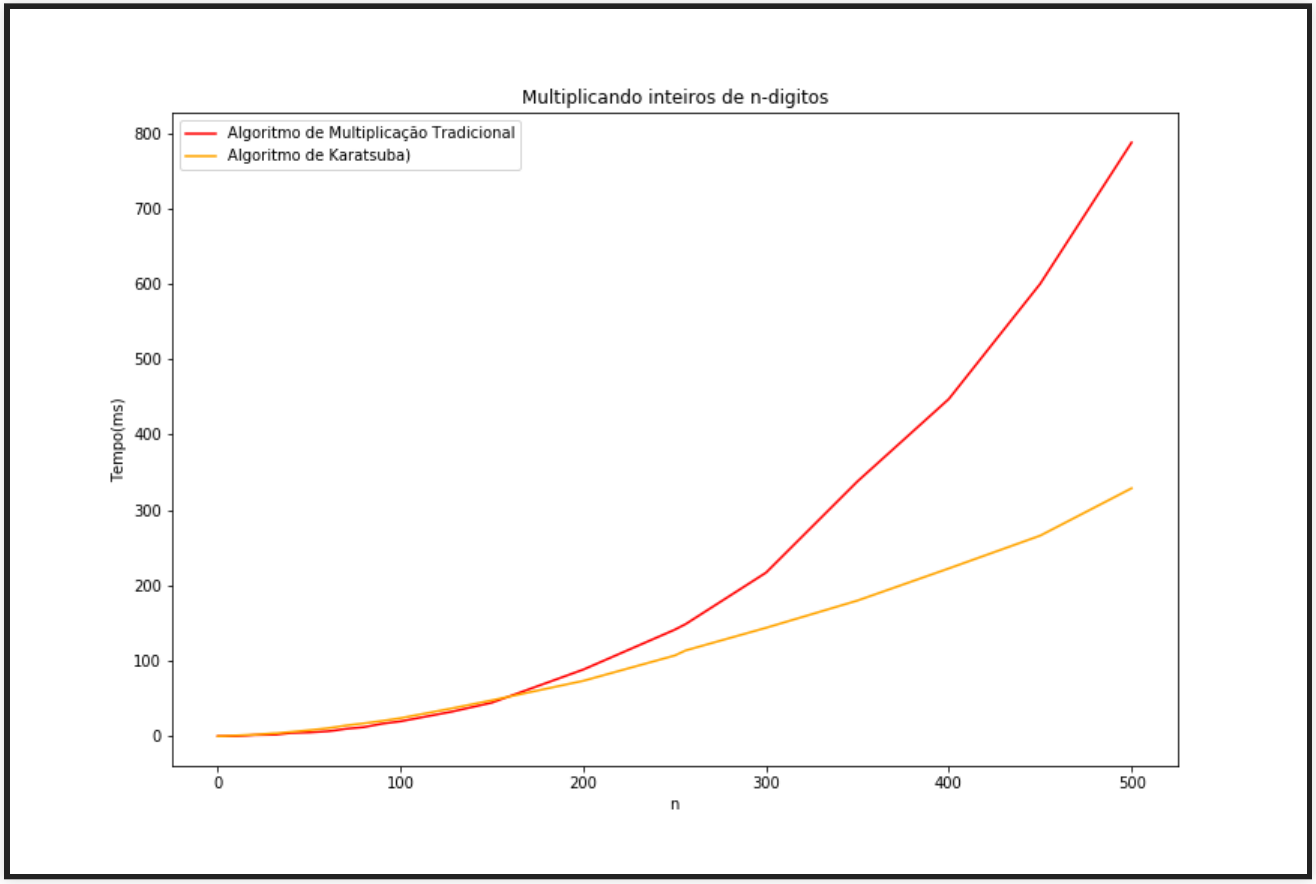
ALGORITMO DE KARATSUBA

```
def karatsuba_recursivo( x, y ):
    n = max( len(x), len(y) )
    # acrescenta zeros se os tamanhos forem diferenes
    while len(x) < n:
      x.insert(0,0)
    while len(y) < n:
      y.insert(0,0)
    if n == 1:
      return x[0]*y[0] # caso básico, multipliação de dois dígitos
    meio = round(n/2)
    a = x[:meio] # [ x[0], x[1], ..., x[meio-1] ]
    b = x[meio:] # [ x[meio], ..., x[n-1] ]
    c = y[:meio]
    d = y[meio:]
    p1 = karatsuba_recursivo( a , c )
    p2 = karatsuba_recursivo( b , d )
    p3 = karatsuba_recursivo( digitos( inteiro(a) + inteiro(b) ) , digitos( inteiro(c) + inteiro(d) )
    return  p1 * 10**(2*(n - meio)) + (p3-p2-p1) * 10**(n-meio) + p2
```

COMPARANDO OS DOIS ALGORITMOS



COMPARANDO OS DOIS ALGORITMOS



É POSSÍVEL FAZER MELHOR?

- Sim!
  - Toom-Cook(1963) - Ao invés de quebrar em 3 problemas de tamanho $\frac{n}{2}$, quebra em 5 problemas de $\frac{n}{3}$, com tempo de execução $O(n^{1.465})$
  - Schönhage-Strassen (1971) - tempo de execução $O(n\log(n)\log\log(n))$
  - Furer (2007) - tempo de execução $n\log(n)2^{O(\log(n))}$
  - Harvey-Hoever (2019) - tempo de execução $O(n\log(n))$
- Existem diversos algoritmos para esse problema

É POSSÍVEL FAZER MELHOR?

- Um limite trivial inferior é $O(n)$, pois na melhor das hipóteses temos que percorrer todos os dígitos, mas não se conhece (nem mesmo se sabe se é possível) um algoritmo com esse desempenho.
- Também não se conhece um limite do menor custo possível

RESTANTE DO CURSO