Análise de Algoritmos

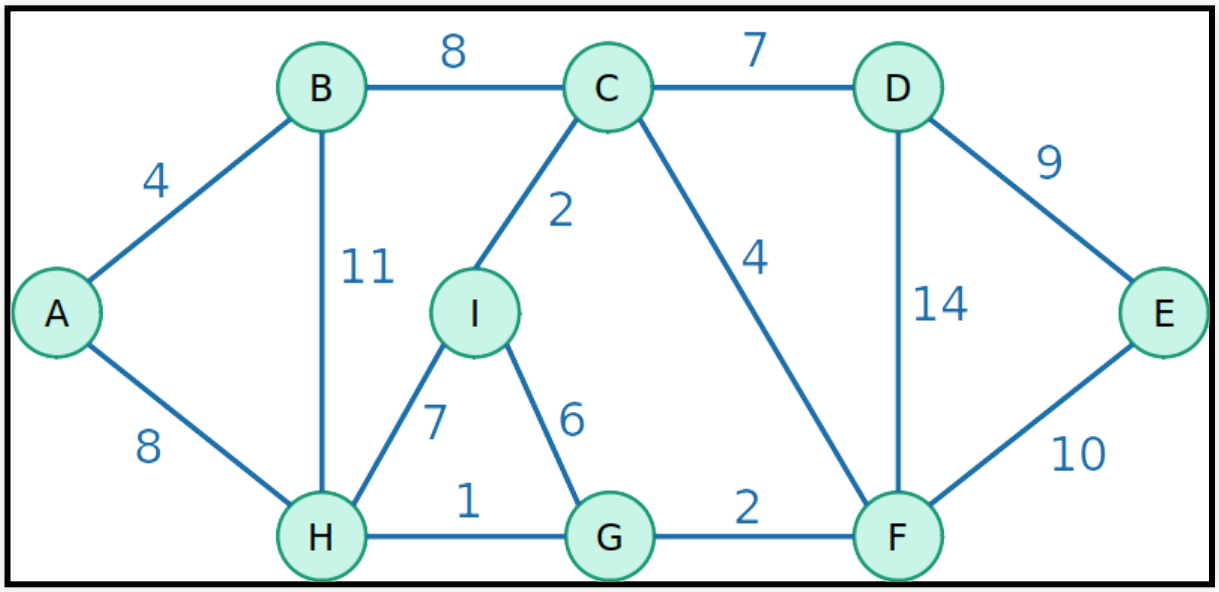
Ronaldo Cristiano Prati

Bloco A, sala 513-2

ronaldo.prati@ufabc.edu.br

Árvore Geradora Mínima

- Considere um grafo não direcionado com pesos, como mostrado no exemplo:

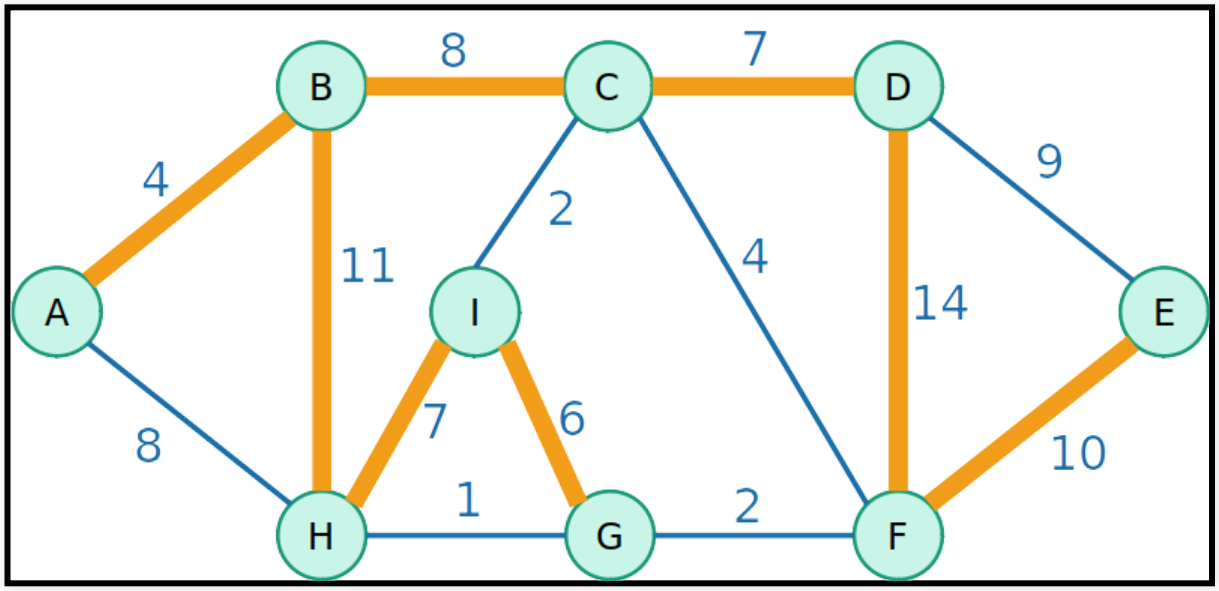


Árvore Geradora

- Uma **árvore** T é grafo que não tem ciclos
- Uma **árvore geradora** é uma árvore formada por um **subconjunto de areastas** de um grafo que conecta **todos** os nós do grafo
- O **custo** $w(T)$ de uma árvore geradora é a soma dos pesos de suas arestas

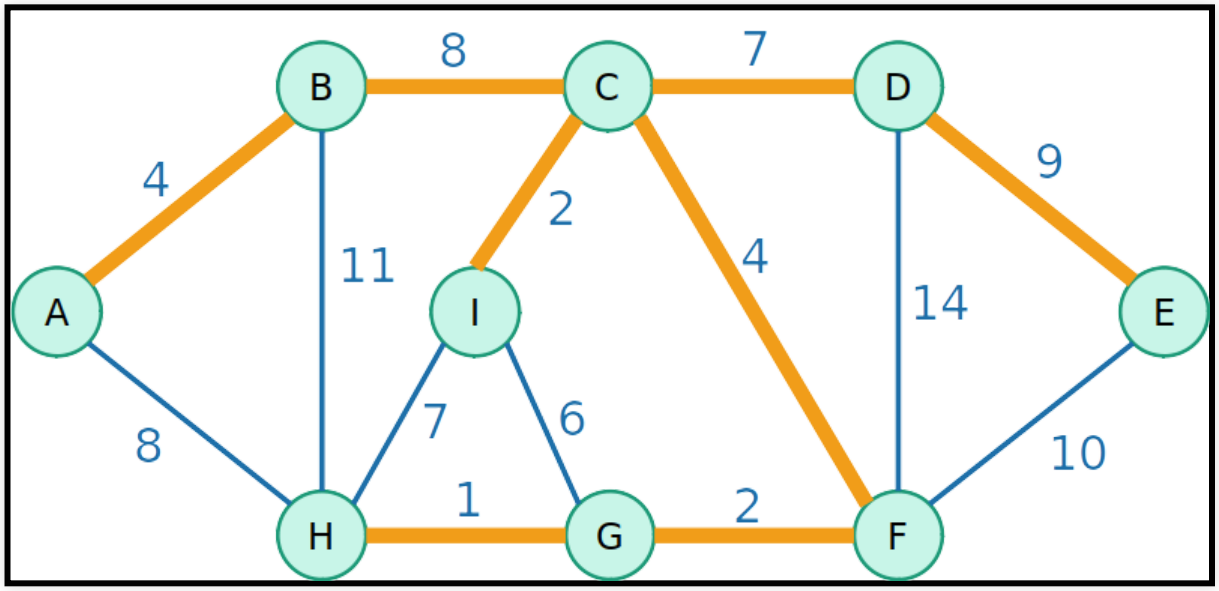
Árvore Geradora

- Por exemplo, a árvore geradora destacada em laranja tem um custo $w(T) = 67$



Árvore Geradora

- Essa outra árvore geradora destacada em laranja tem um custo $w(T) = 37$



Árvore Geradora Mínima

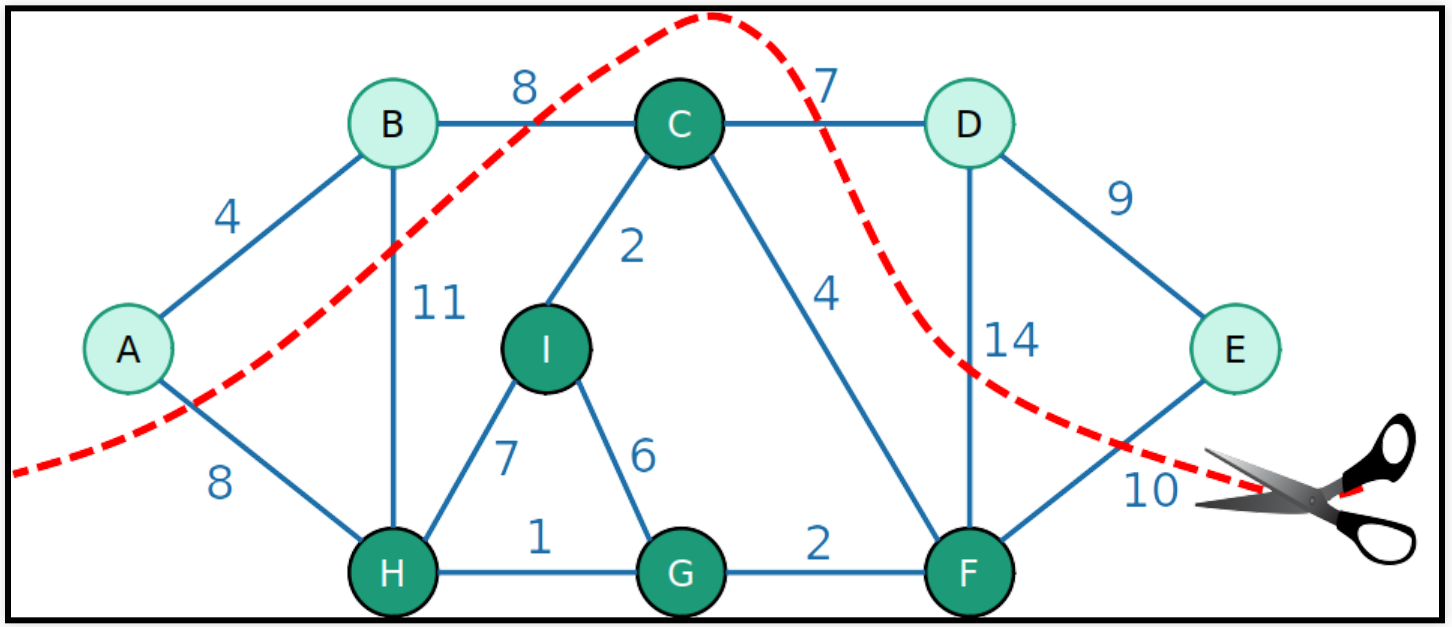
- Uma **árvore geradora mínima** (MST) é uma árvore formada por um **subconjunto de arestas** de um grafo que conecta **todos** os vértices do grafo e tem **custo mínimo**
- Muitas aplicações:
  - Projeto de redes
  - Análise de grupos genéticos
  - Segmentação de imagens
  - Primitiva para outros algoritmos de grafos

Como gerar uma MST

- Vamos estudar duas estratégias gulosas para encontrar uma MST

Corte

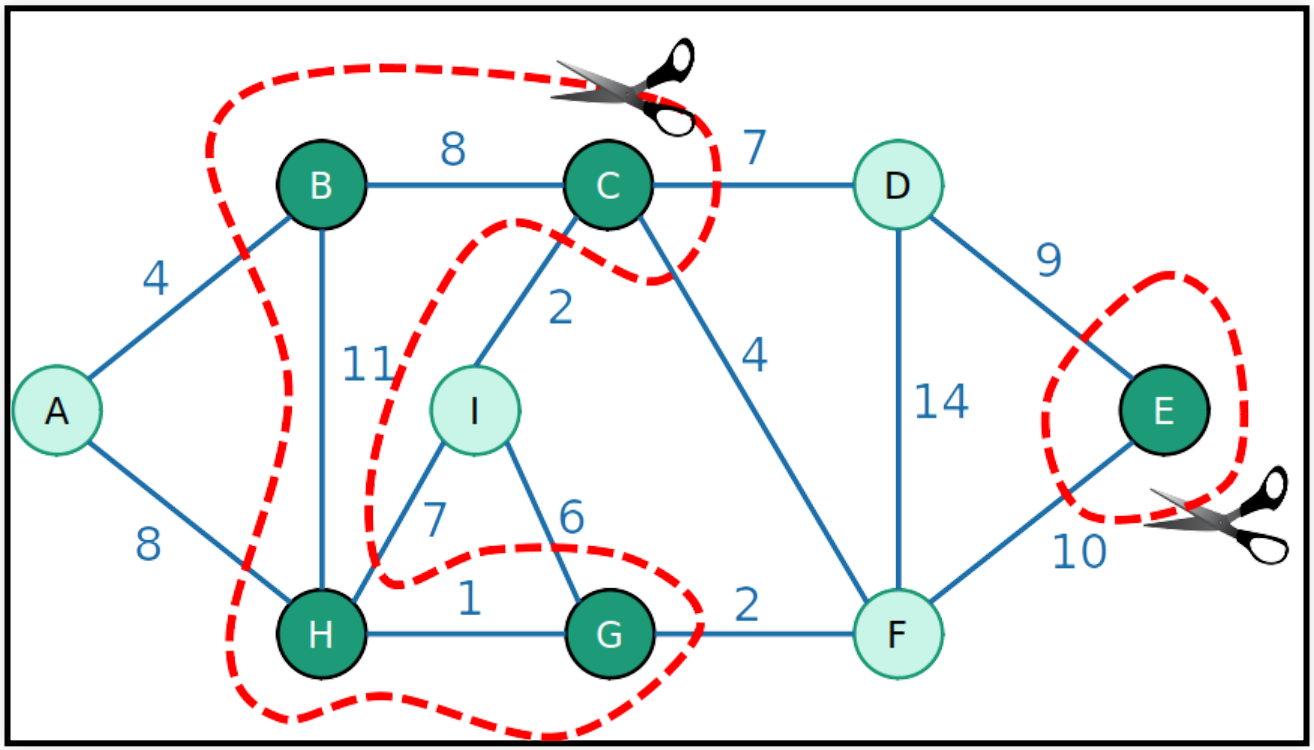
- Um **corte** é uma partição dos vértices em duas partes:



- Esse é o corte $\{A, B, D, E\}$ e $\{C, I, H, G, F\}$

Corte

- Uma ou ambas das duas partes podem ser desconexas



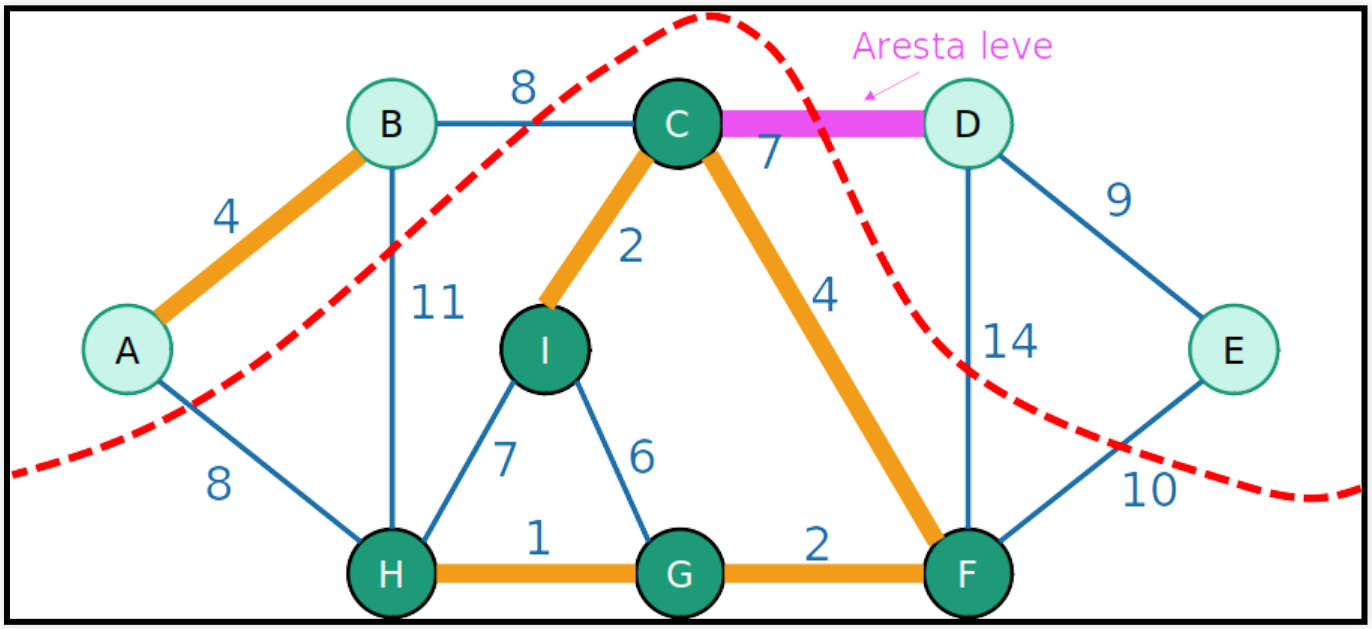
- Esse é o corte $\{A, I, D, F\}$ e $\{B, C, E, H, G\}$

Corte

- Seja S um subconjunto dos nós de G
- Dizemos que o um corte **respeita** respeita S se nenhuma aresta de S cruza o corte

Corte

- A aresta de menor peso que que cruza o corte é chamada de **aresta leve**

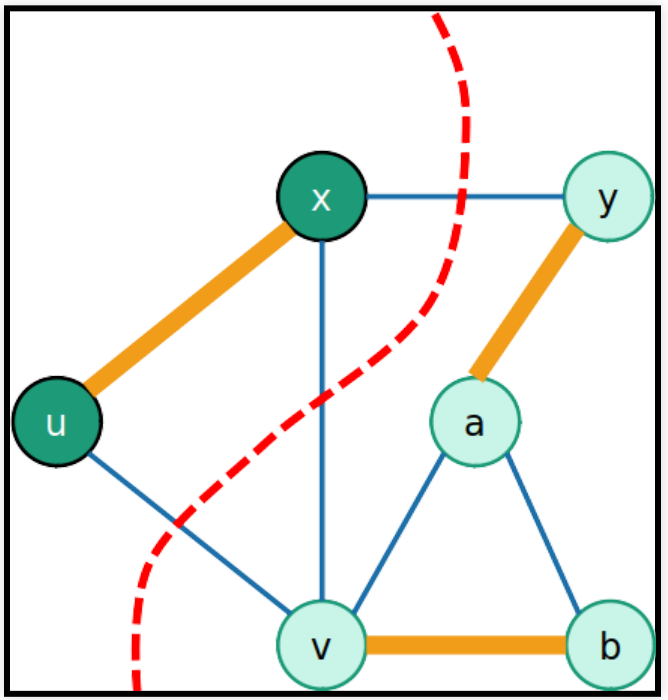


Aresta leve está na MST

- Seja S um conjunto de arestas e considere um corte que respeita S.
- Suponha que existe uma MST que contenha S
- Seja (u, v) uma aresta leve
- Então a MST conterá $S \cup \{uv\}$

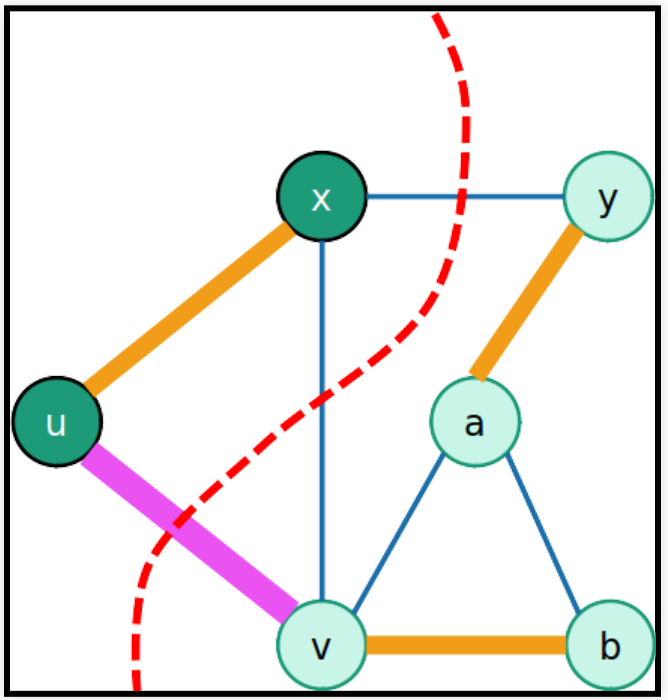
Aresta leve está na MST

- Suponha que temos:
  - um corte que respeita S
  - S é parte de alguma MST T



Aresta leve está na MST

- Suponha que temos:
  - um corte que respeita S
  - S é parte de alguma MST T
- Assuma que (u, v) é leve
  - Menor custo cruzando o corte



Aresta leve está na MST

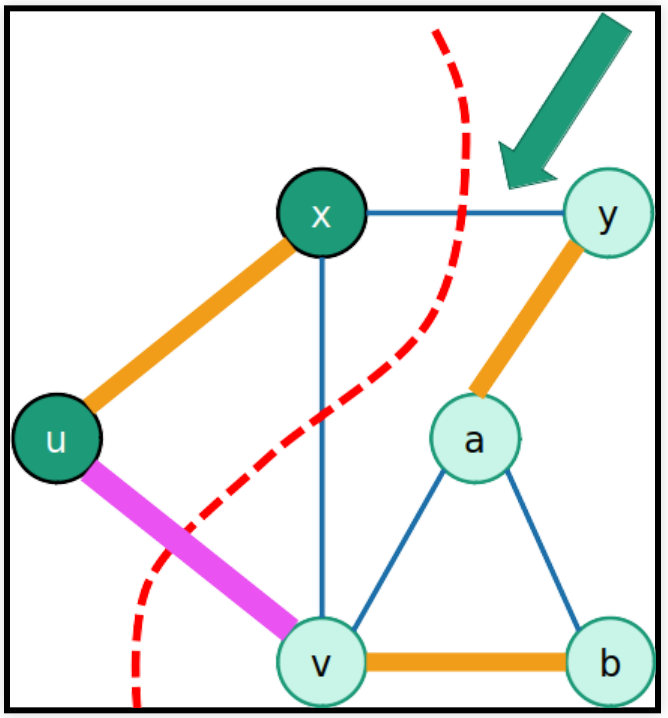
Aresta leve está na MST

- Suponha que $(u, v) \notin T$. Existe portanto outra aresta (x, y) que cruza o corte que pertence a T.
- Seja T' a MST obtida trocando (x, y) por (u, v)

$$w(T') = w(T) - w(x, y) + w(u, v)$$

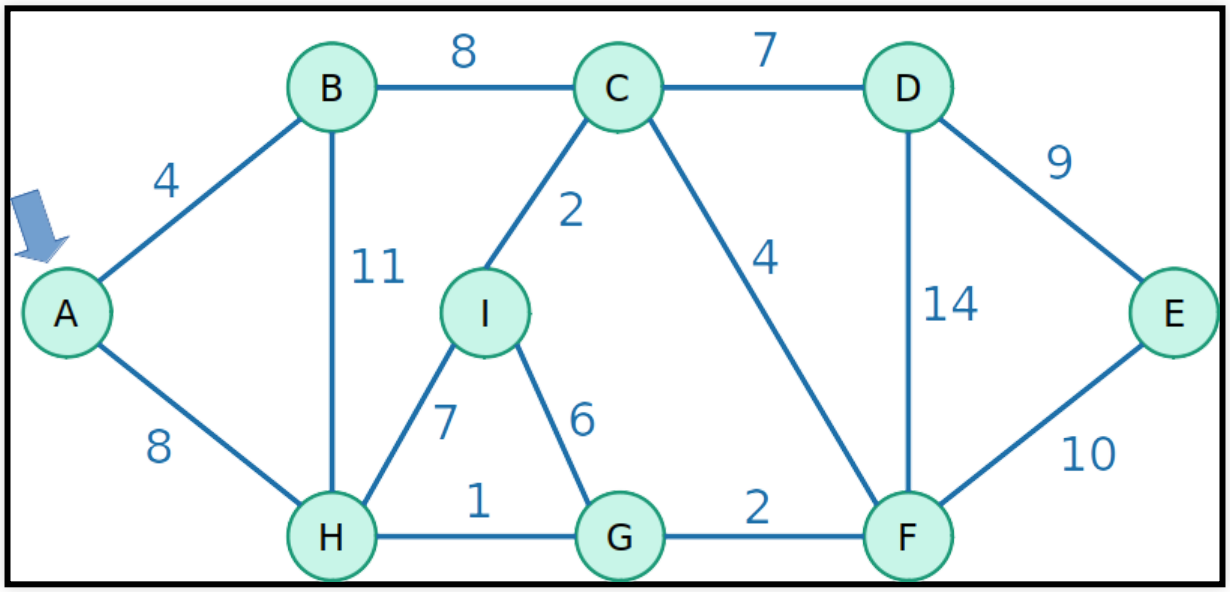
- Como $w(u, v) \leq w(x, y)$, ou seja:

$$w(T') \leq w(T)$$



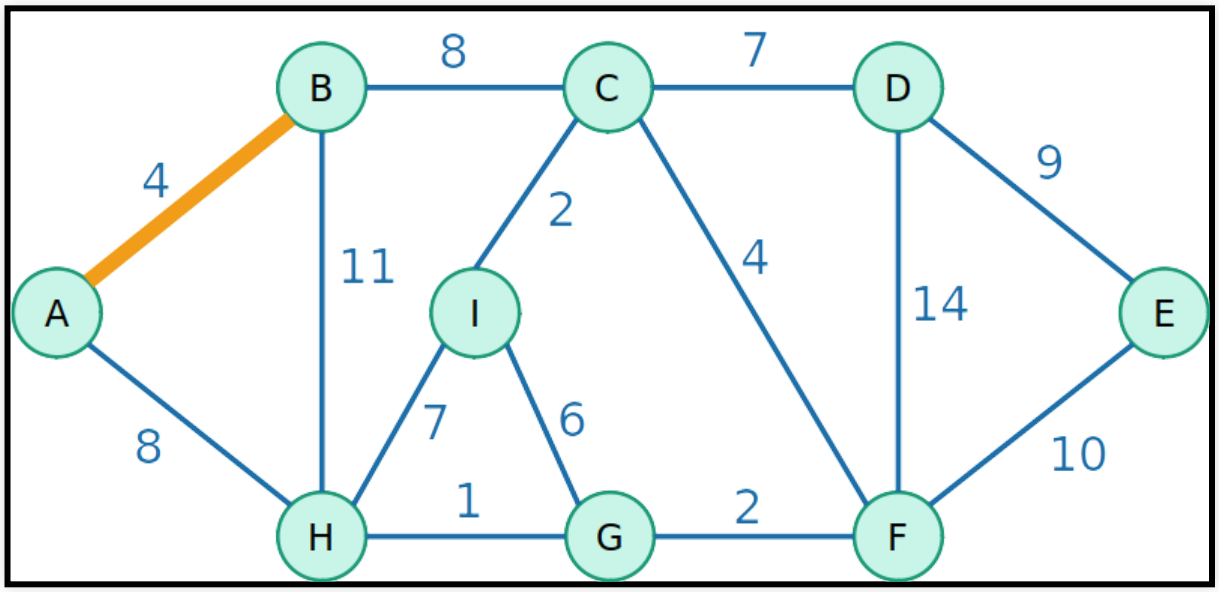
Algoritmo de Prim

- Escolha uma raíz para a árvore e de maneira gulosa adiciona a aresta de menor peso que podemos para crescer essa árvore



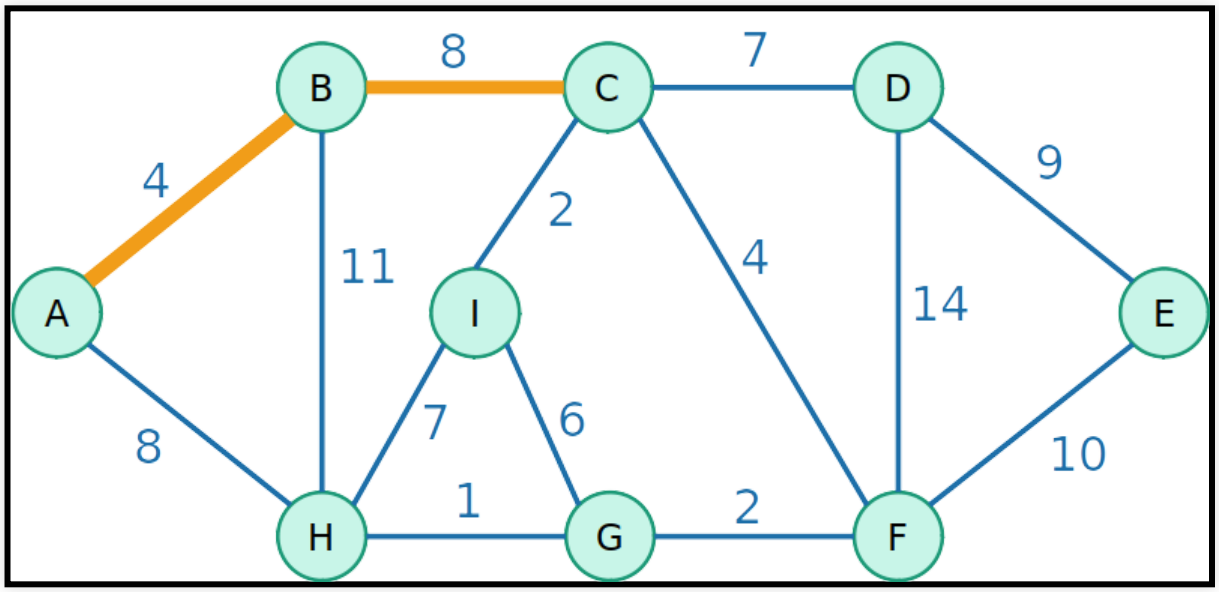
Algoritmo de Prim

- Escolha uma raíz para a árvore e de maneira gulosa adiciona a aresta de menor peso que podemos para crescer essa árvore



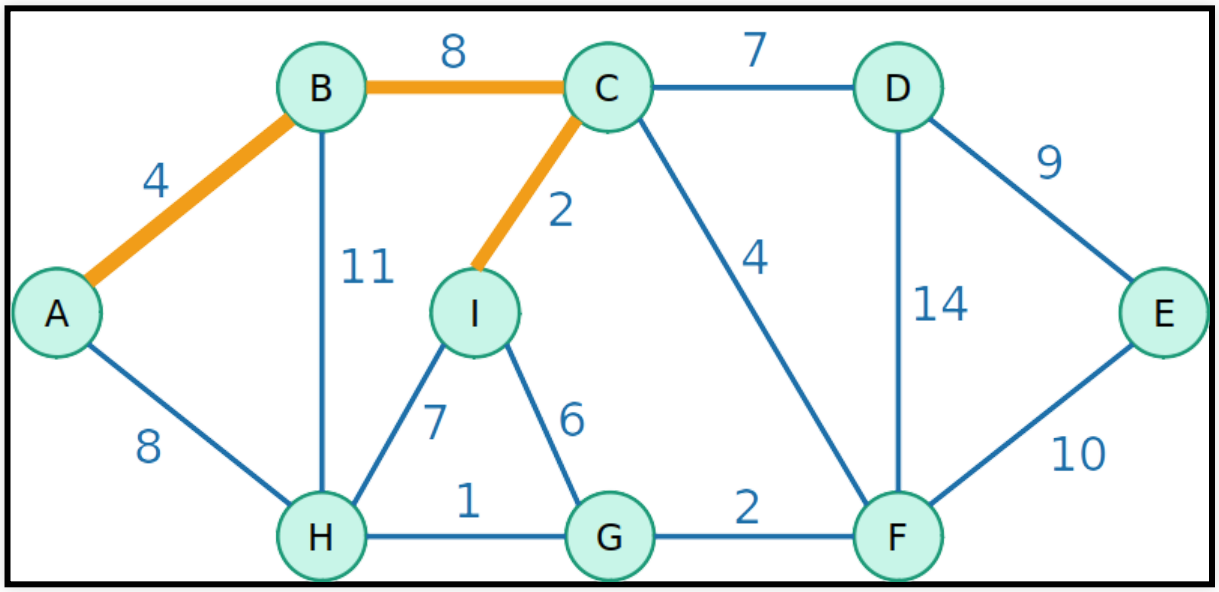
Algoritmo de Prim

- Escolha uma raíz para a árvore e de maneira gulosa adiciona a aresta de menor peso que podemos para crescer essa árvore



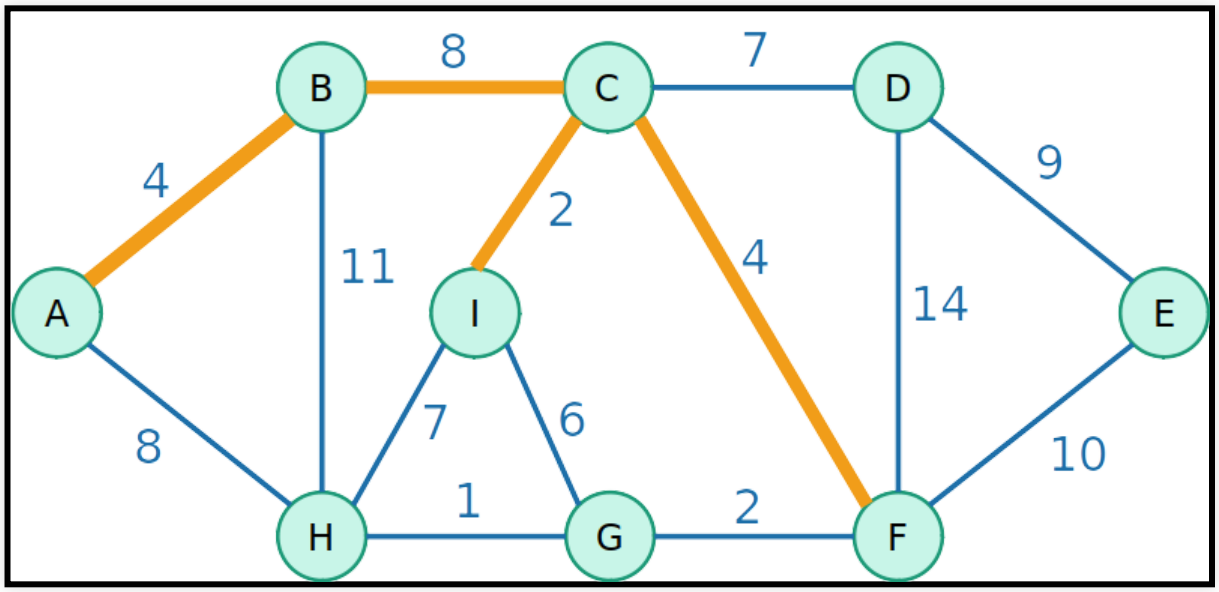
Algoritmo de Prim

- Escolha uma raíz para a árvore e de maneira gulosa adiciona a aresta de menor peso que podemos para crescer essa árvore



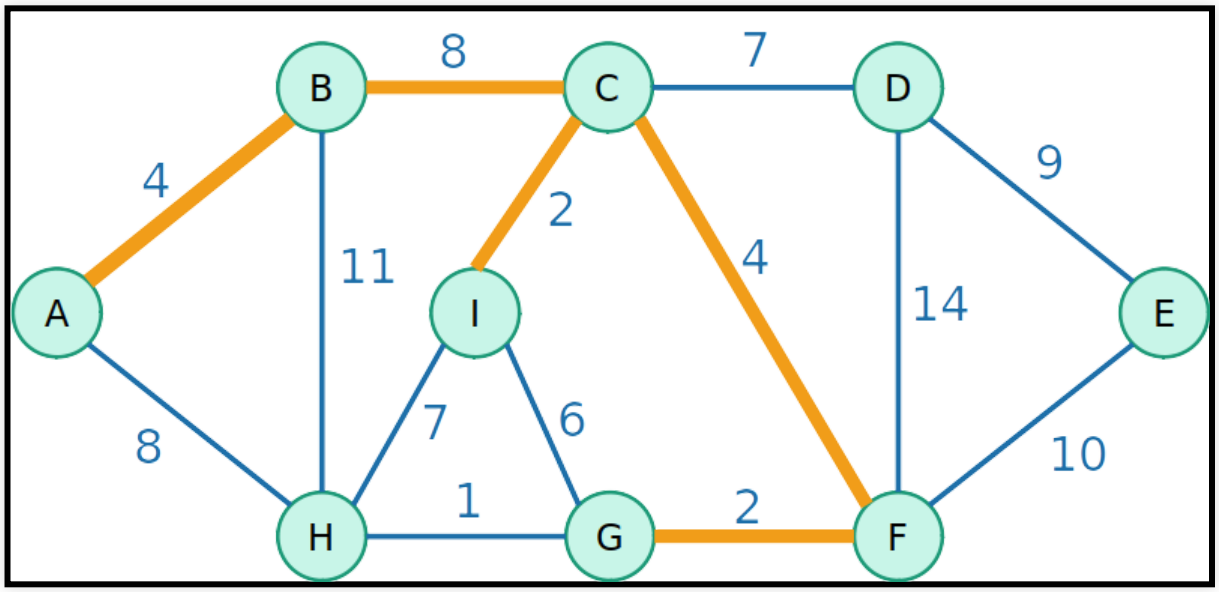
Algoritmo de Prim

- Escolha uma raíz para a árvore e de maneira gulosa adiciona a aresta de menor peso que podemos para crescer essa árvore



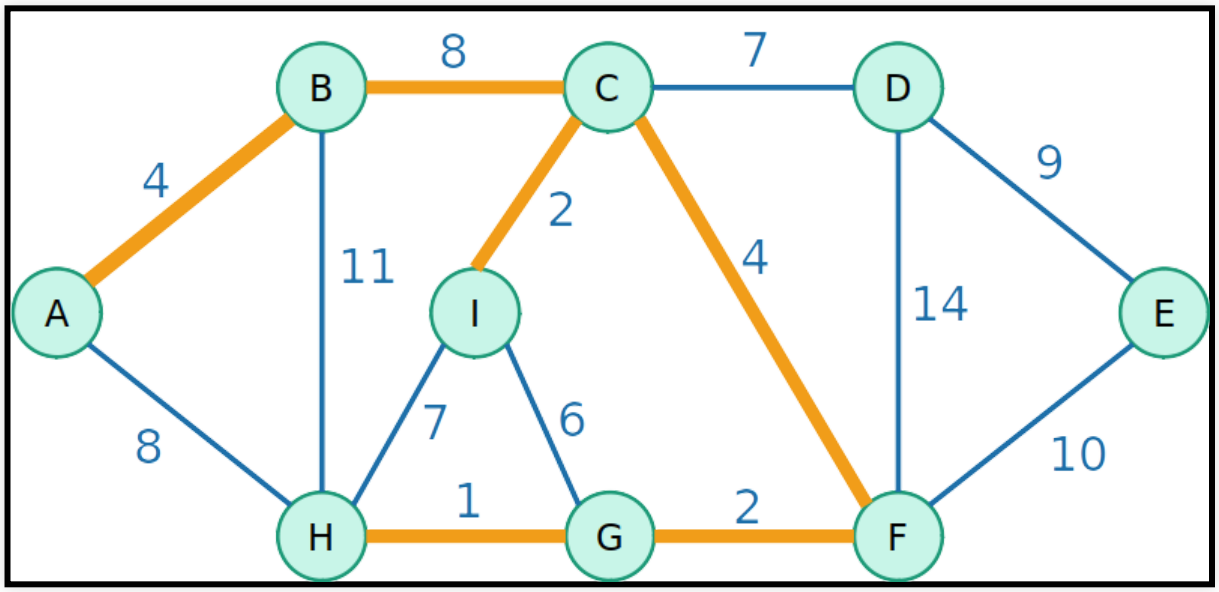
Algoritmo de Prim

- Escolha uma raíz para a árvore e de maneira gulosa adiciona a aresta de menor peso que podemos para crescer essa árvore



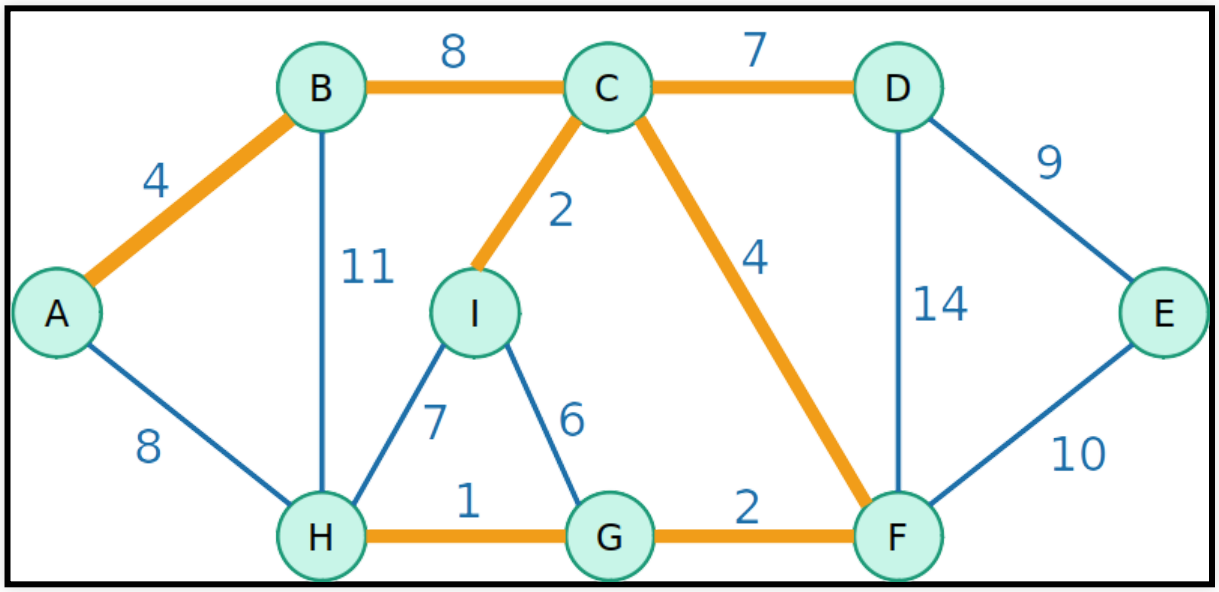
Algoritmo de Prim

- Escolha uma raíz para a árvore e de maneira gulosa adiciona a aresta de menor peso que podemos para crescer essa árvore



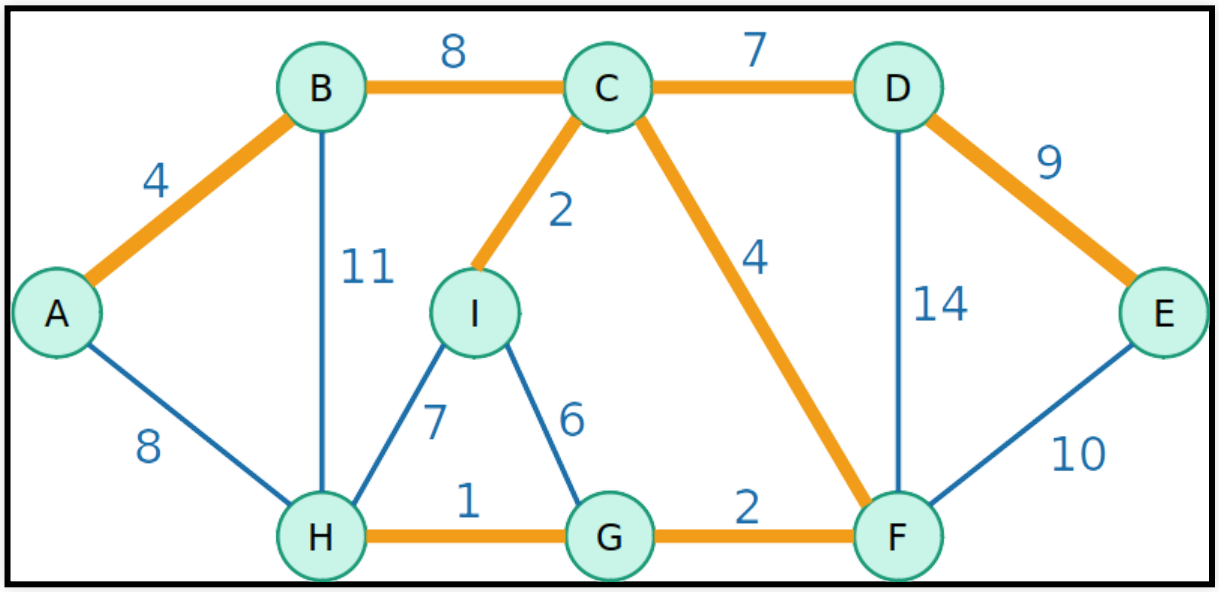
Algoritmo de Prim

- Escolha uma raíz para a árvore e de maneira gulosa adiciona a aresta de menor peso que podemos para crescer essa árvore



Algoritmo de Prim

- Escolha uma raíz para a árvore e de maneira gulosa adiciona a aresta de menor peso que podemos para crescer essa árvore

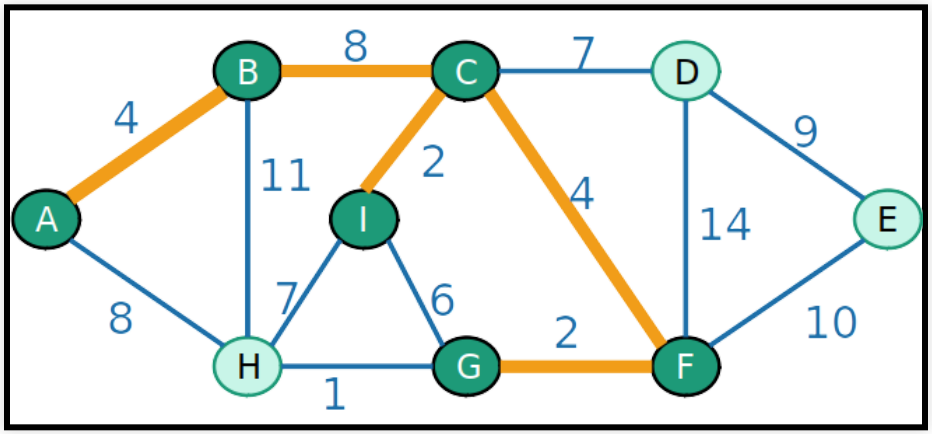


Algoritmo de Prim

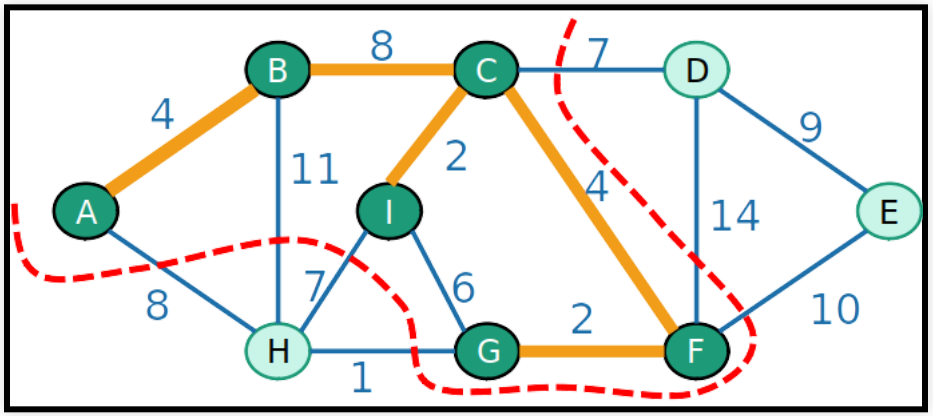
Algoritmo 68: PRIM($G = (V, E)$, w)

```
1 Seja S = {s}, onde s ∈ V(G) é um vértice qualquer
2 Seja F = ∅
3 enquanto S ≠ V(G) faça
4     Seja e = uv uma aresta de menor custo com u ∈ S e v ∉ S
5     F = F ∪ {uv}
6     S = S ∪ {v}
7 retorna F
```

Por que funciona?



- Considere a MST atual



- E considere o corte {visitados, não visitados}

Por que funciona?

- Considere a MST atual,
- E considere o corte {visitados, não visitados}
- O conjunto S de arestas selecionadas até agora respeita o corte
- A aresta adicionada é uma aresta leve
- Pelo lema, ela é uma aresta segura para adicionar

Por que funciona?

- A estratégia gulosa não exclui uma solução ótima
- Por indução, podemos provar que a corretudo do algoritmo de Prim

Qual a complexidade?

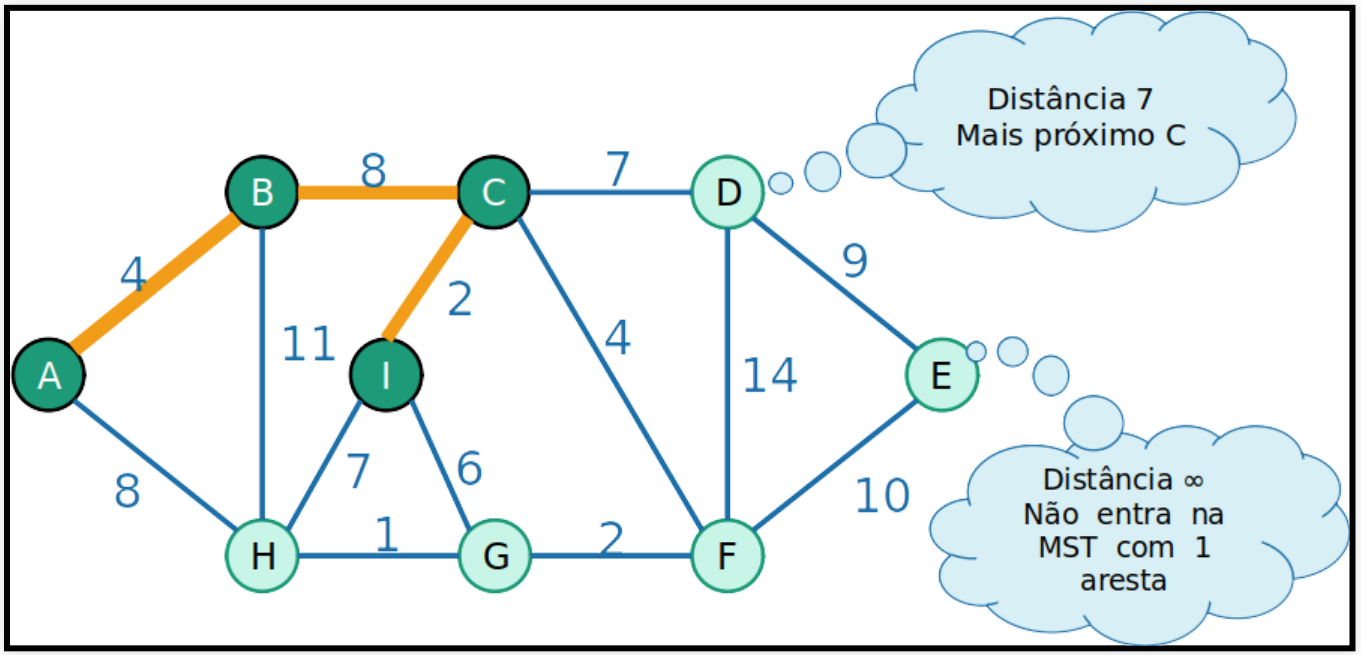
- O algoritmo adiciona um vértice de cada vez, portanto o laço da linha 3 executa $\Theta(m)$, em que $m = |V(G)|$
- Para encontrar a aresta leve, podemos fazer uma busca sobre todas as arestas, e verificar se ela cruza o corte, armazenando a de menor peso. Essa estratégia custa $\Theta(n)$, em que $n = |E(G)|$
- Portanto, a complexidade dessa estratégia é $\Theta(nm)$.

Dá pra fazer melhor?

- Para diminuir a complexidade, podemos usar uma estratégia diferente para encontrar a aresta leve
- Podemos fazer isso usando uma Heap para selecionar a aresta leve que adiciona um nó não visitado na árvore

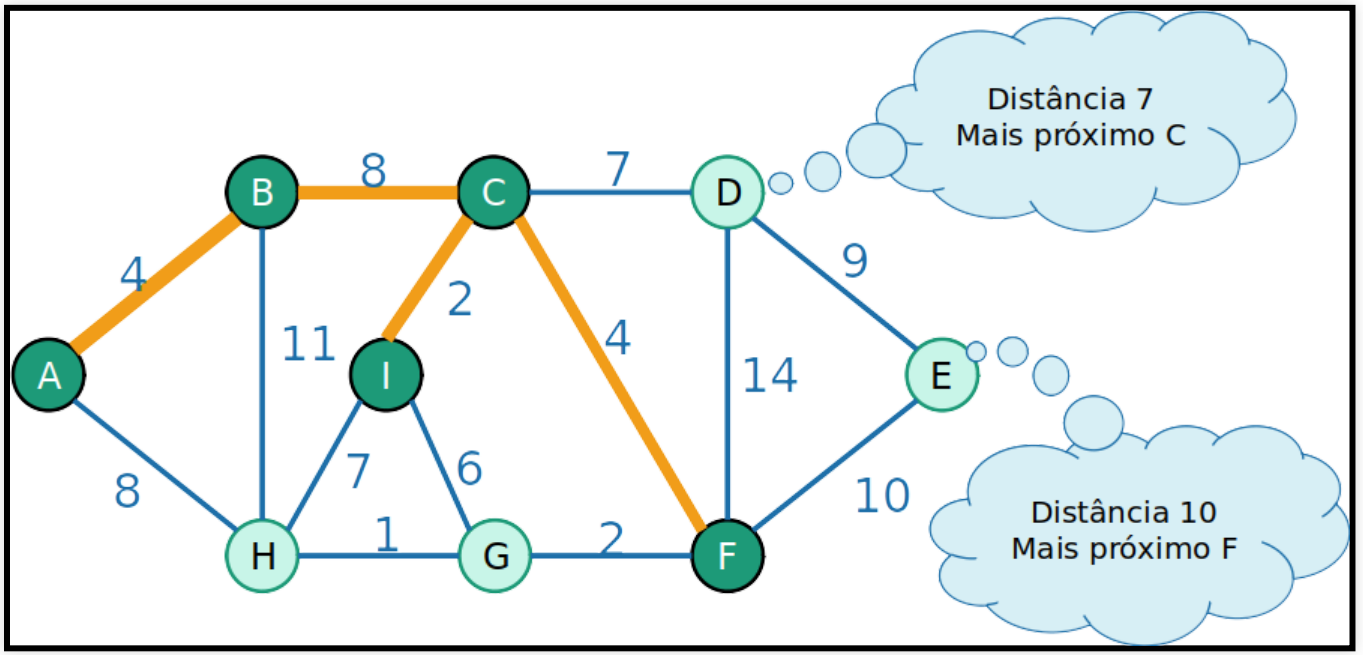
PrimHeap

- Cada nó deve armazenar:
  - O distância até o nó mais próximo da árvore MST
  - Qual é o nó mais próximo
- Se ainda não sabemos qual é a distância, ela é inicializada como infinito


Distância 7
Mais próximo C
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
7
9
11
2
4
14
8
7
6
10
1
2
Distância ∞
Não entra na
MST com 1
aresta

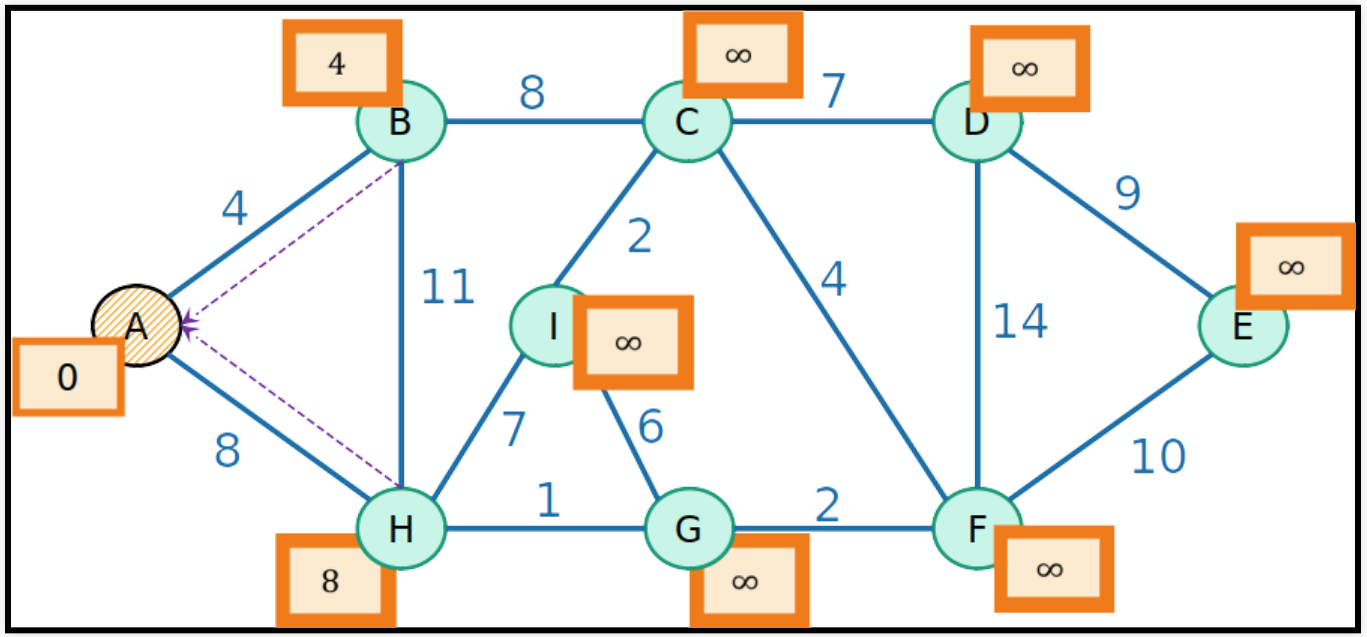
PrimHeap

- Cada nó deve armazenar:
  - O distância até o nó mais próximo da árvore MST
  - Qual é o nó mais próximo
- Quando uma nova aresta é adiciona na árvore, atulizamos as informações


A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
7
9
11
2
4
14
8
7
6
10
1
2
Distância 7
Mais próximo C
Distância 10
Mais próximo F

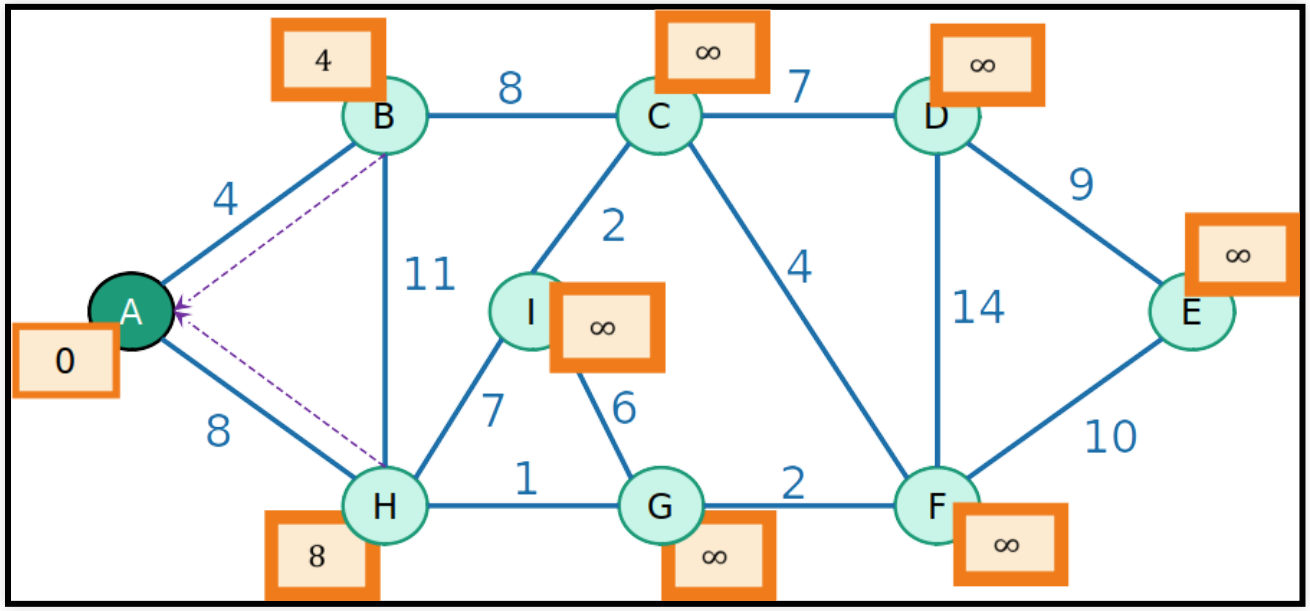
PrimHeap

- Iniciando a construção da MST a partir do nó A
  - Para os vizinhos v de A, o prodedessor de v é A, e a prioridade é $-w(e)$, em que e é a aresta de A a v
  - Para os não vizinhos de A, a prioridade é $-\infty$


4
∞
∞
B
8
C
7
D
4
2
9
∞
11
4
A
I
∞
14
E
0
7
6
8
10
1
2
H
G
F
8
∞
∞

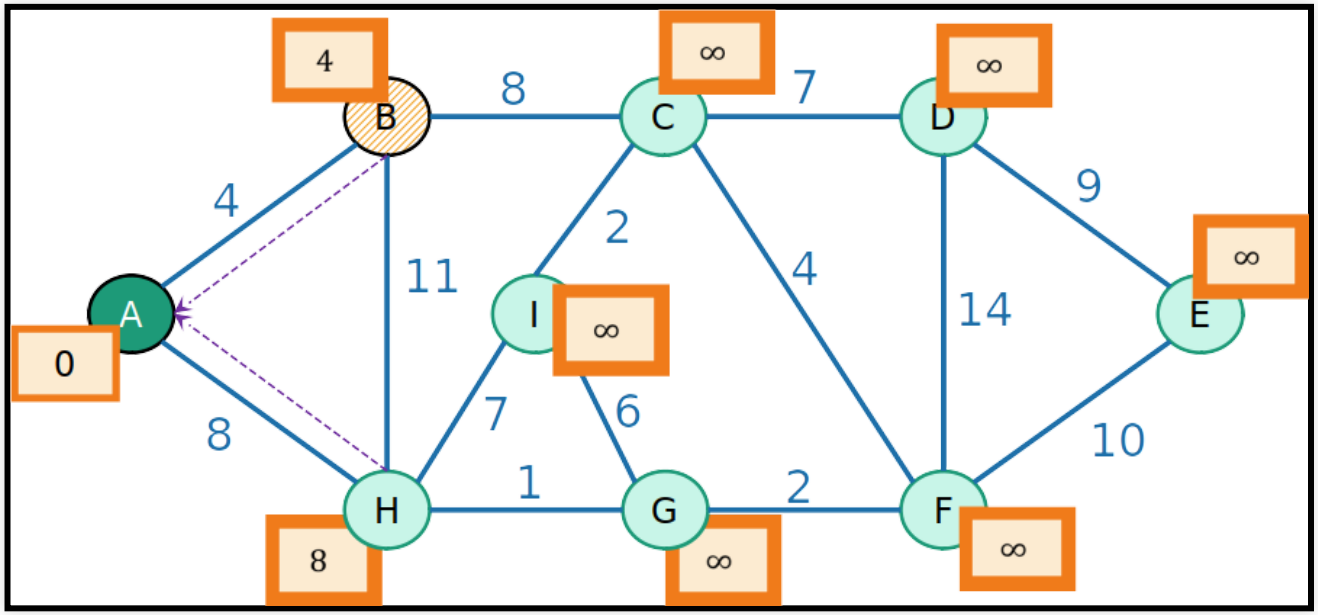
PrimHeap

- A é inserido na MST



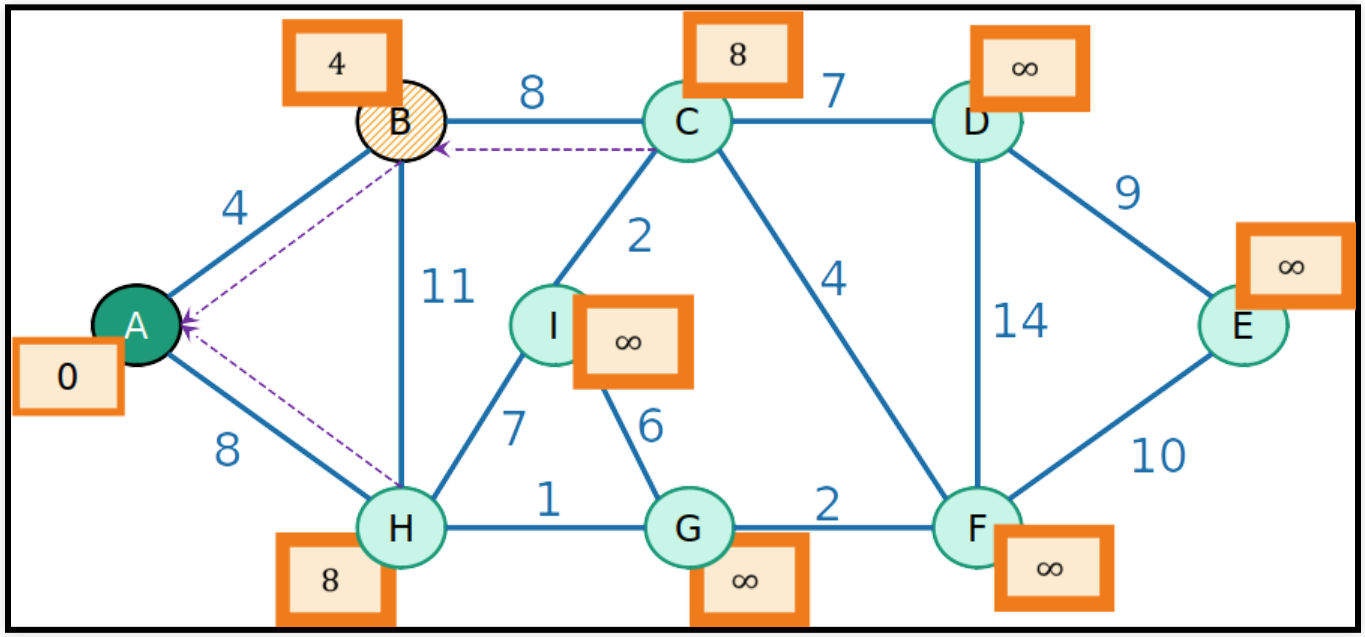
PrimHeap

- Retiramos da Heap o nó de maior prioridade, que é B



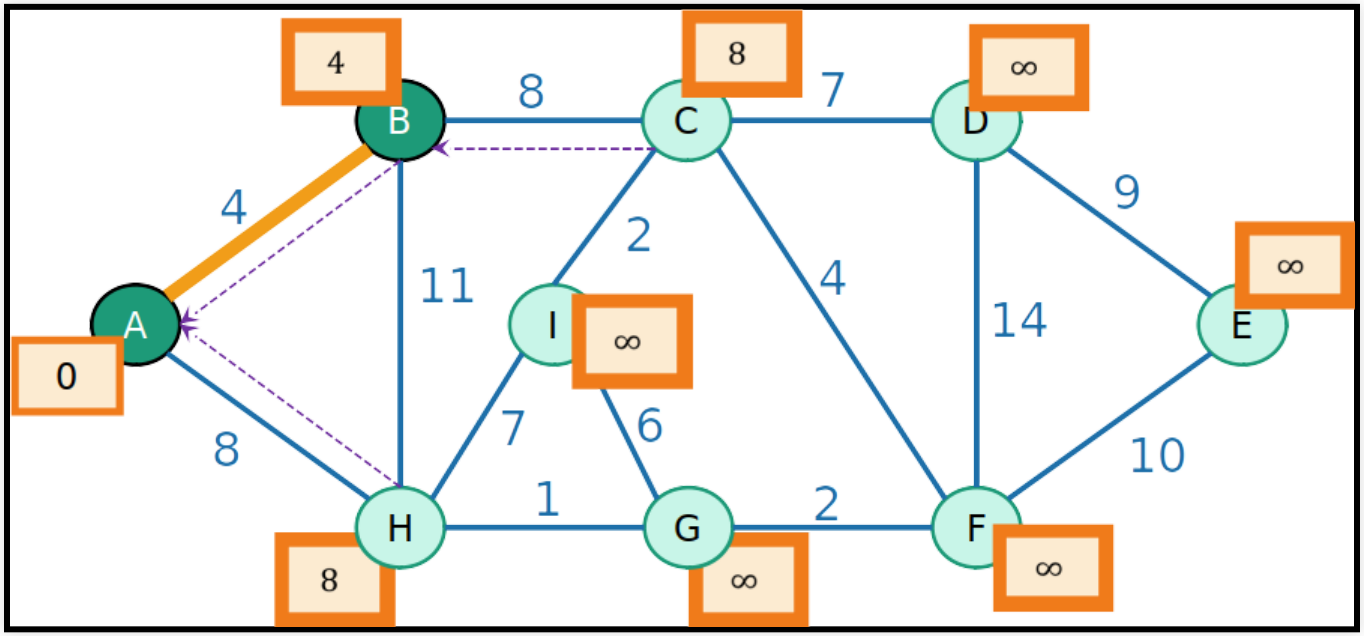
PrimHeap

- Para os vizinhos v de B, o prodedessor de v é B, e a prioridade é atualizada para $-w(e)$, em que e é a aresta de B a v



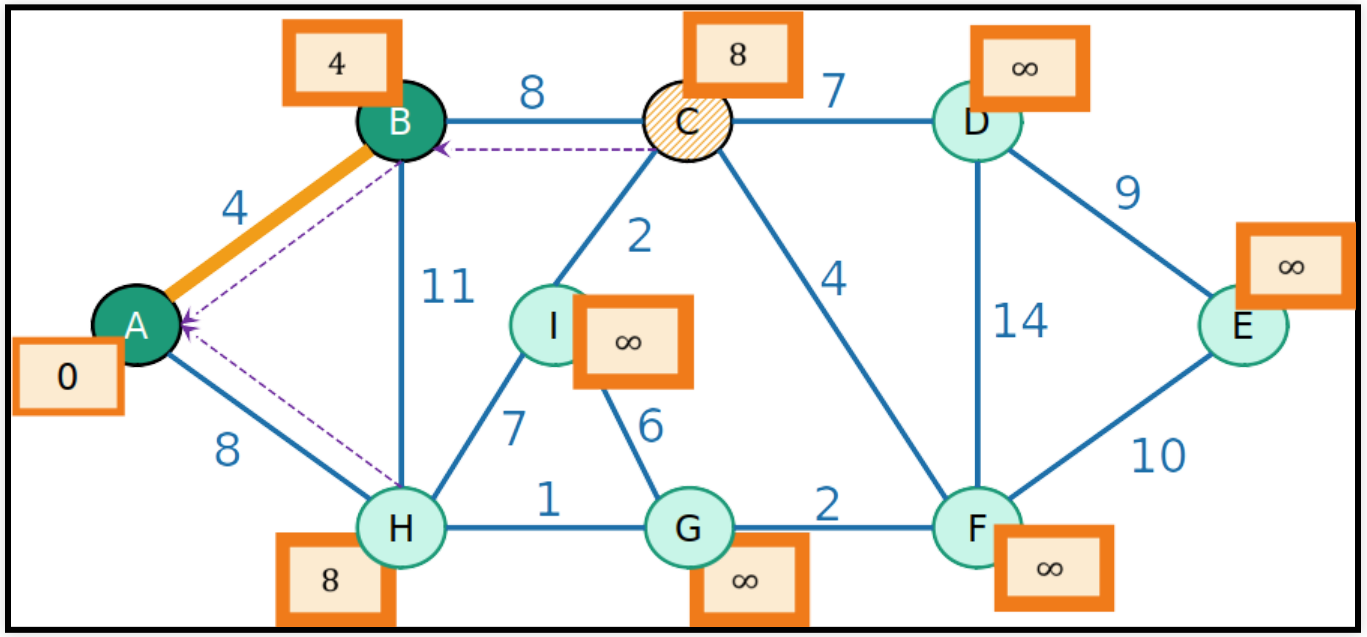
PrimHeap

- Como o prodedessor de B é A, o vértice B e a aresta (A, B) são inseridos na MST



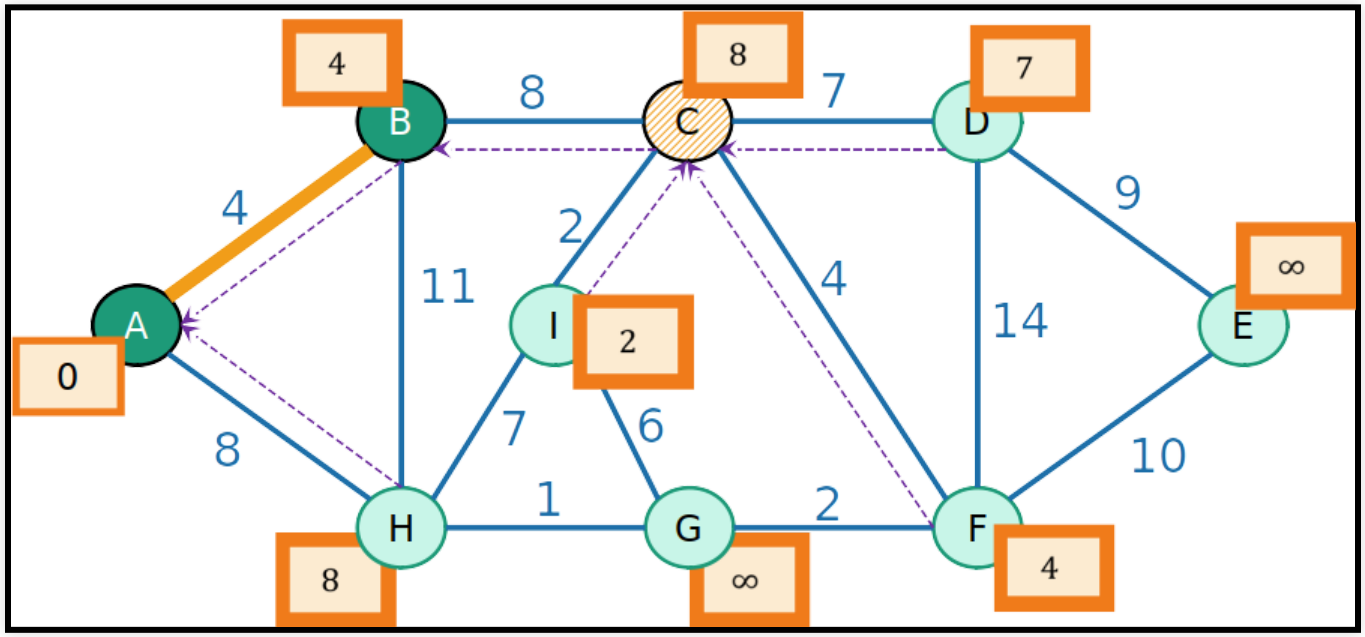
PrimHeap

- Retiramos da Heap o nó de maior prioridade, que é C (nesse caso, empatado com H)



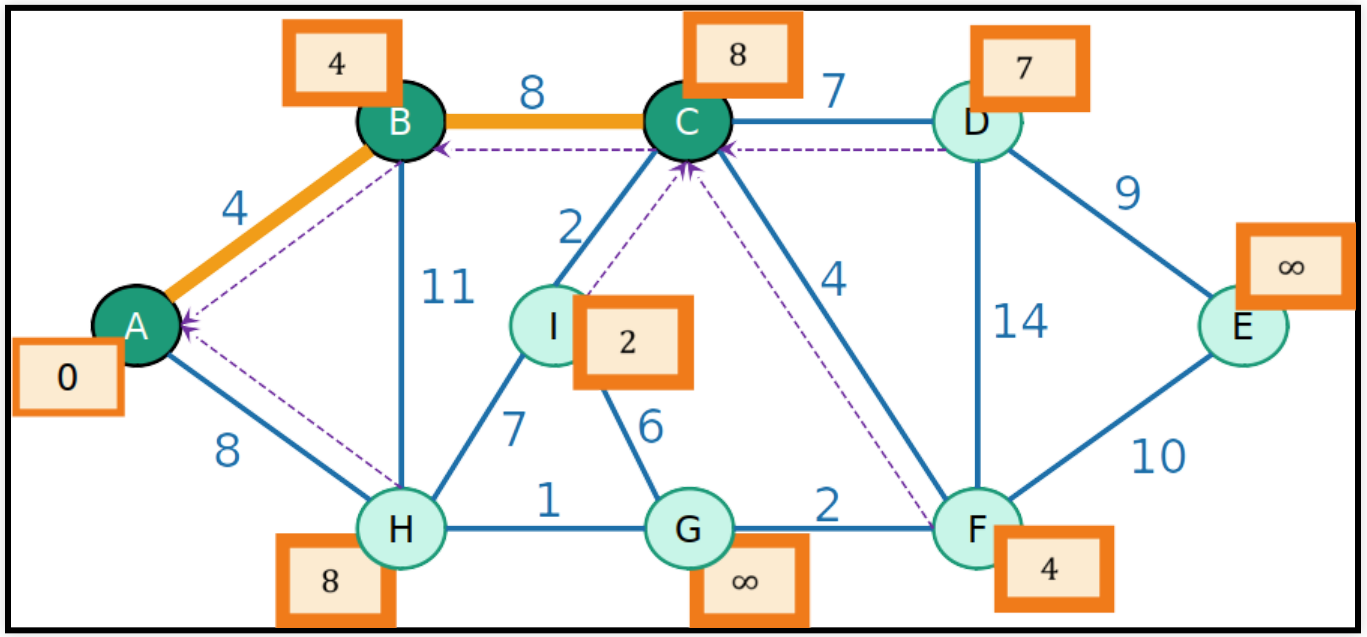
PrimHeap

- Para os vizinhos v de C, o prodedessor de v é C, e a prioridade é atualizada para $-w(e)$, em que e é a aresta de C a v



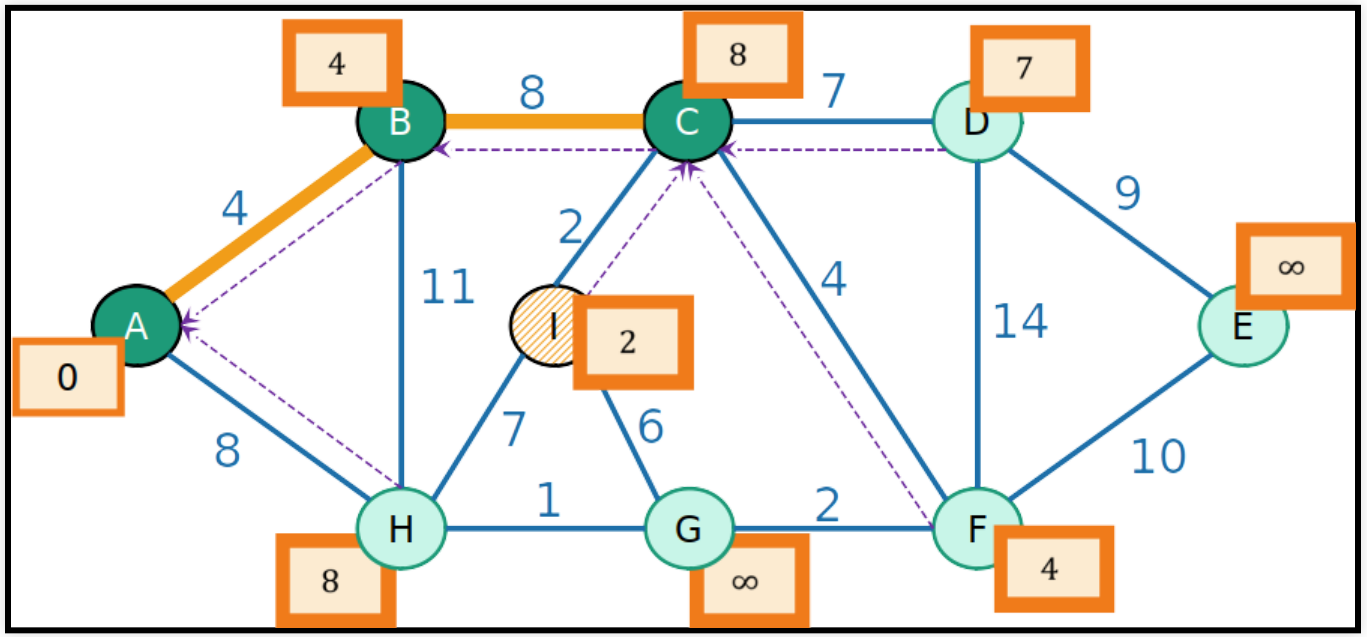
PrimHeap

- Como o prodedessor de C é B, o vértice B e a aresta (A, B) são inseridos na MST



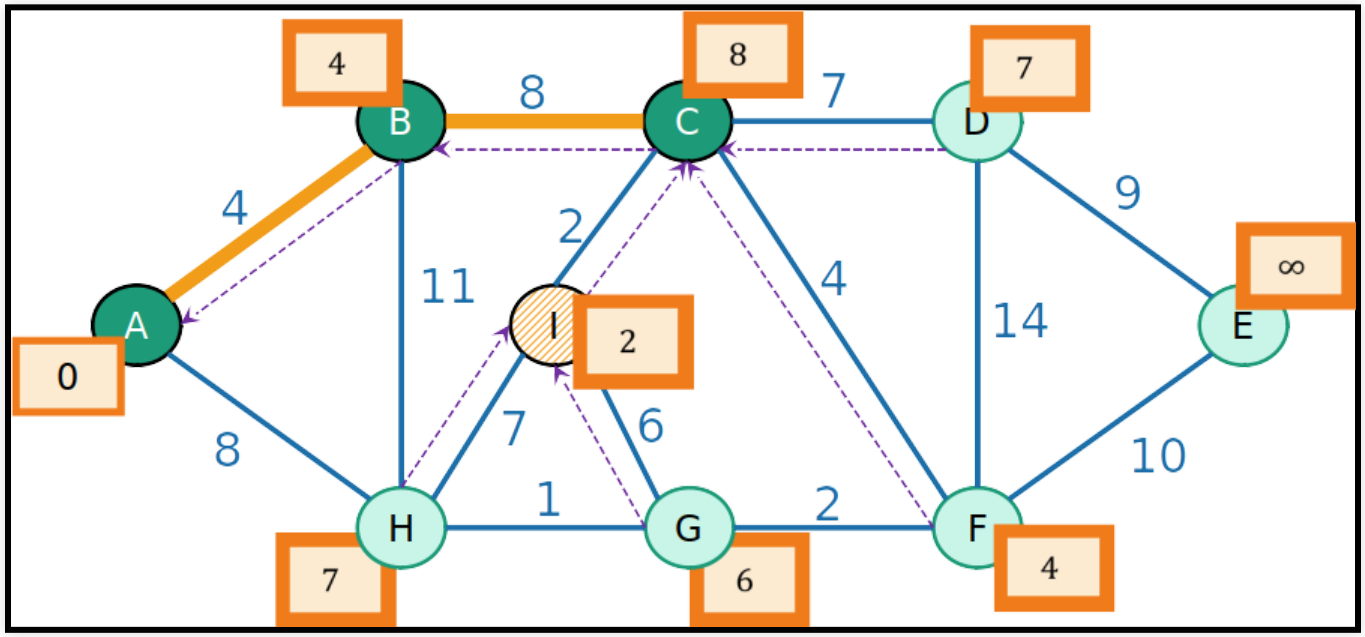
PrimHeap

- Retiramos da Heap o nó de maior prioridade, que é I



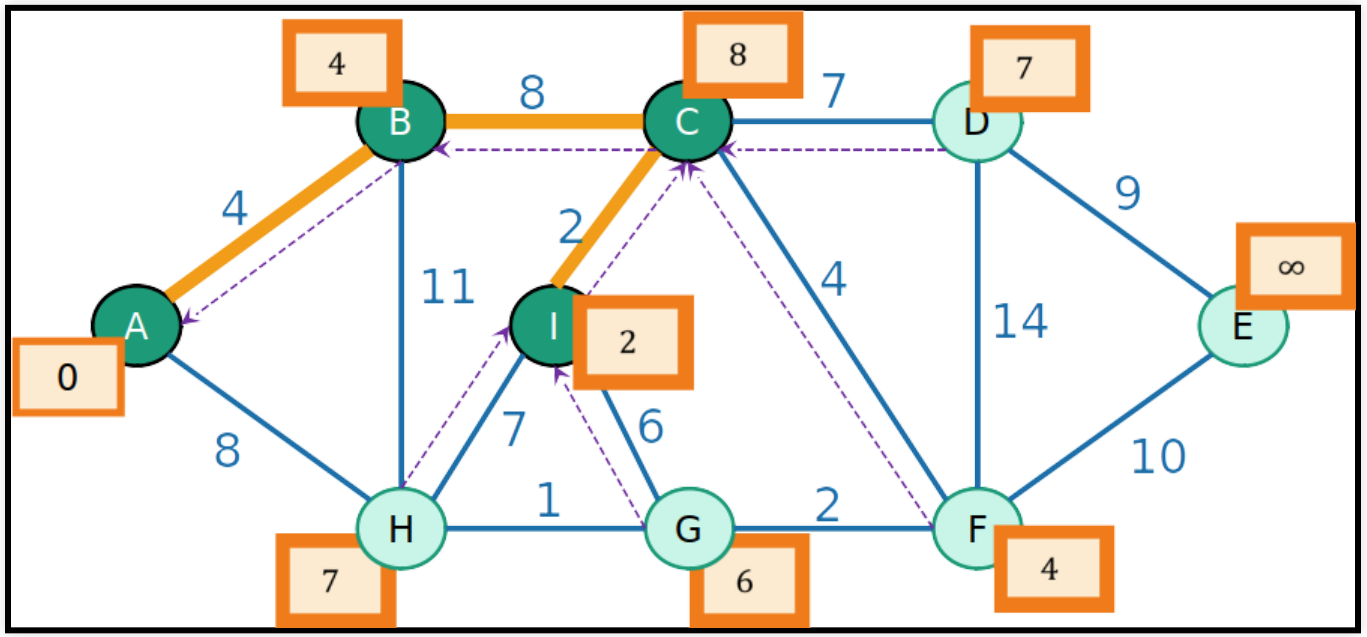
PrimHeap

- Para os vizinhos v de I, o prodedessor de v é I, e a prioridade é atualizada para $-w(e)$, em que e é a aresta de C a v



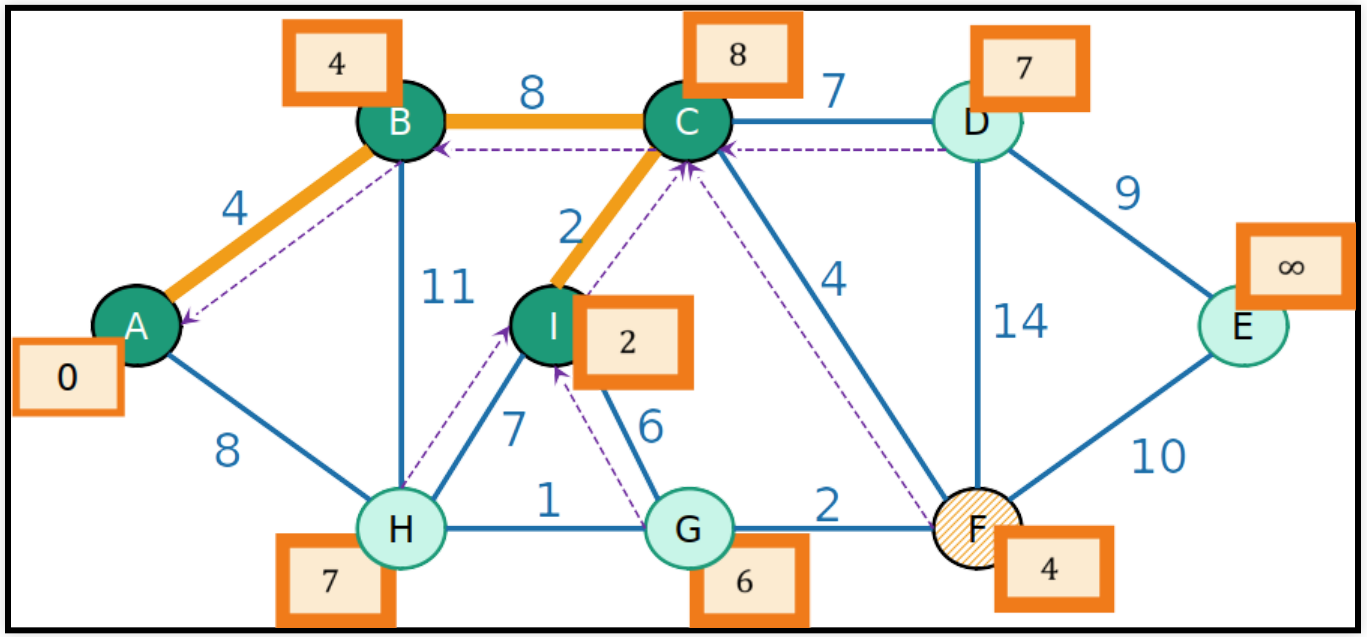
PrimHeap

- Como o prodedessor de I é C, o vértice I e a aresta (C, I) são inseridos na MST



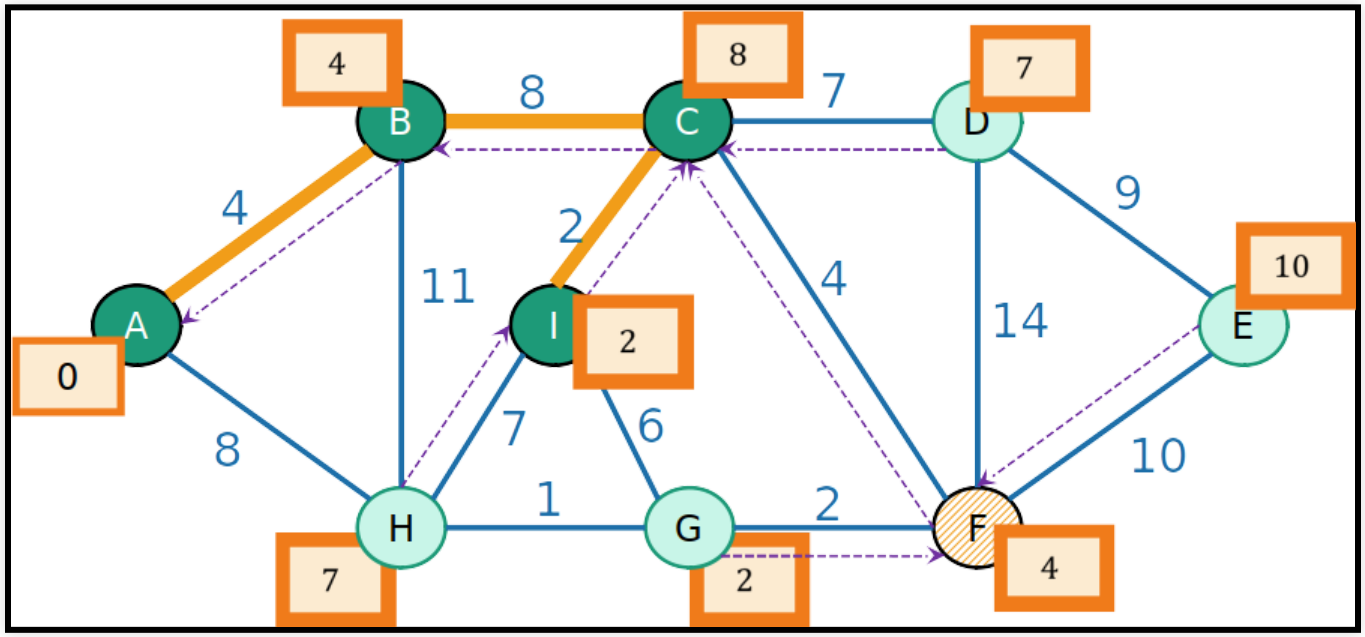
PrimHeap

- Retiramos da Heap o nó de maior prioridade, que é F



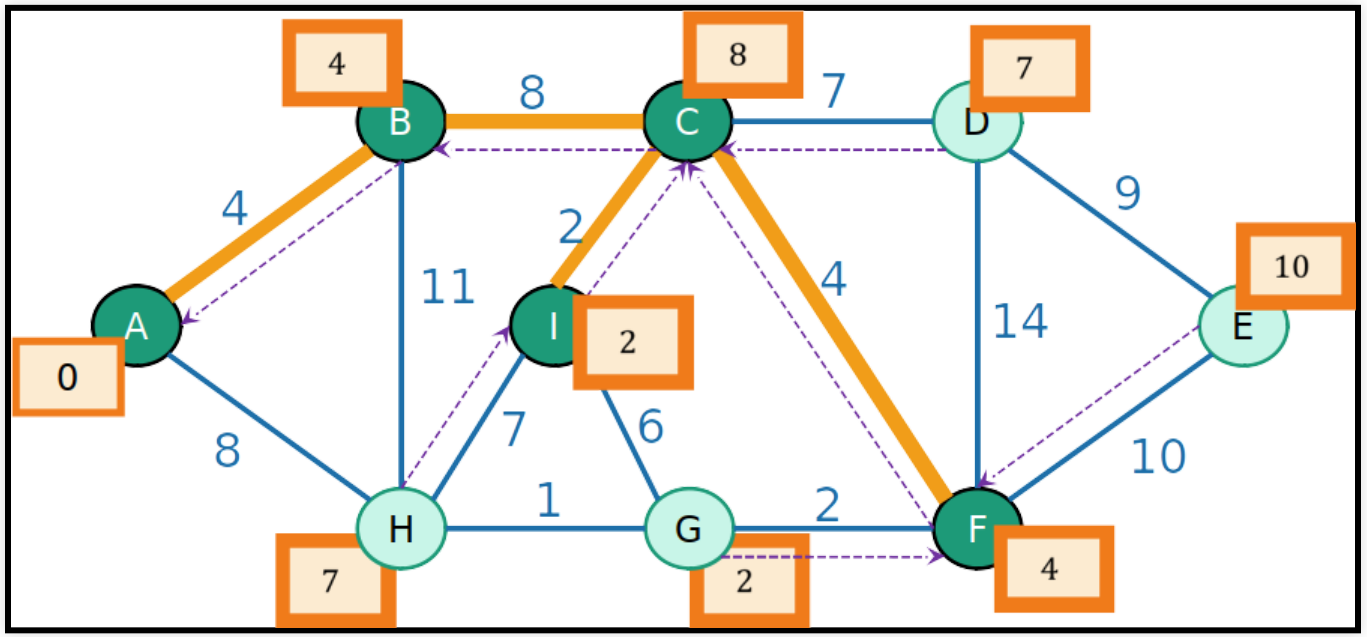
PrimHeap

- Para os vizinhos v de F, o prodedessor de v é F, e a prioridade é atualizada para $-w(e)$, em que e é a aresta de F a v



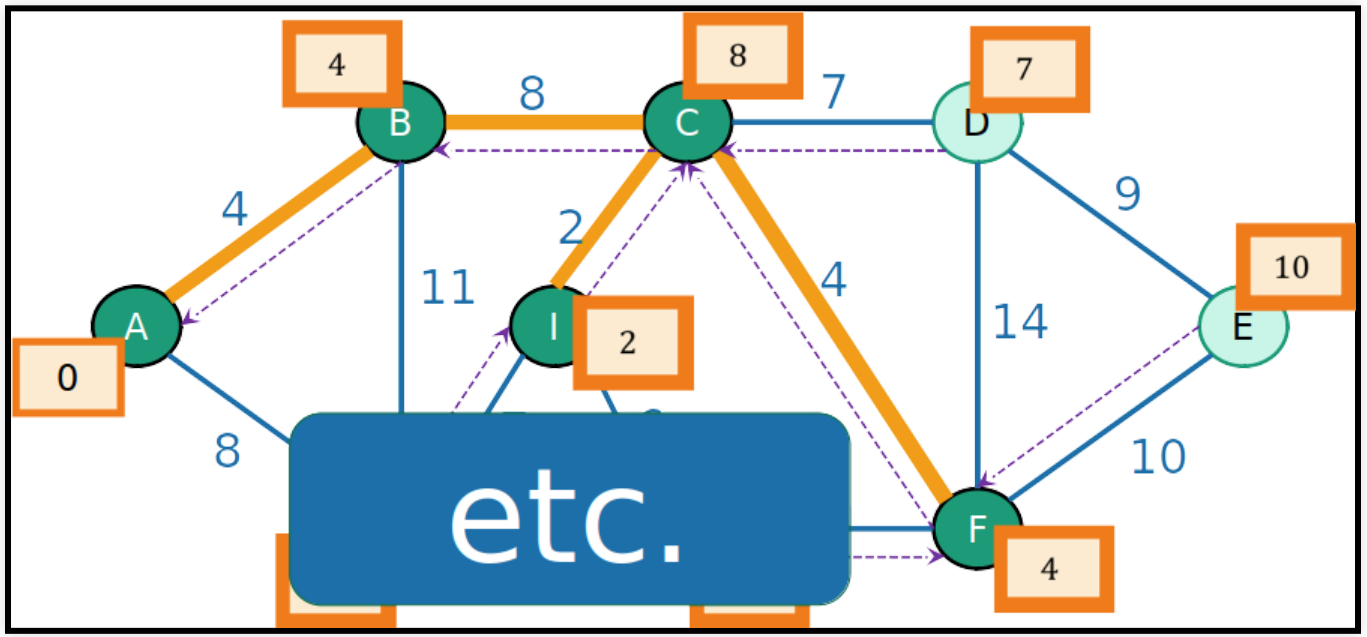
PrimHeap

- Como o prodedessor de I é C, o vértice I e a aresta (C, I) são inseridos na MST



PrimHeap

- E continuamos o processo até construir toda a MST



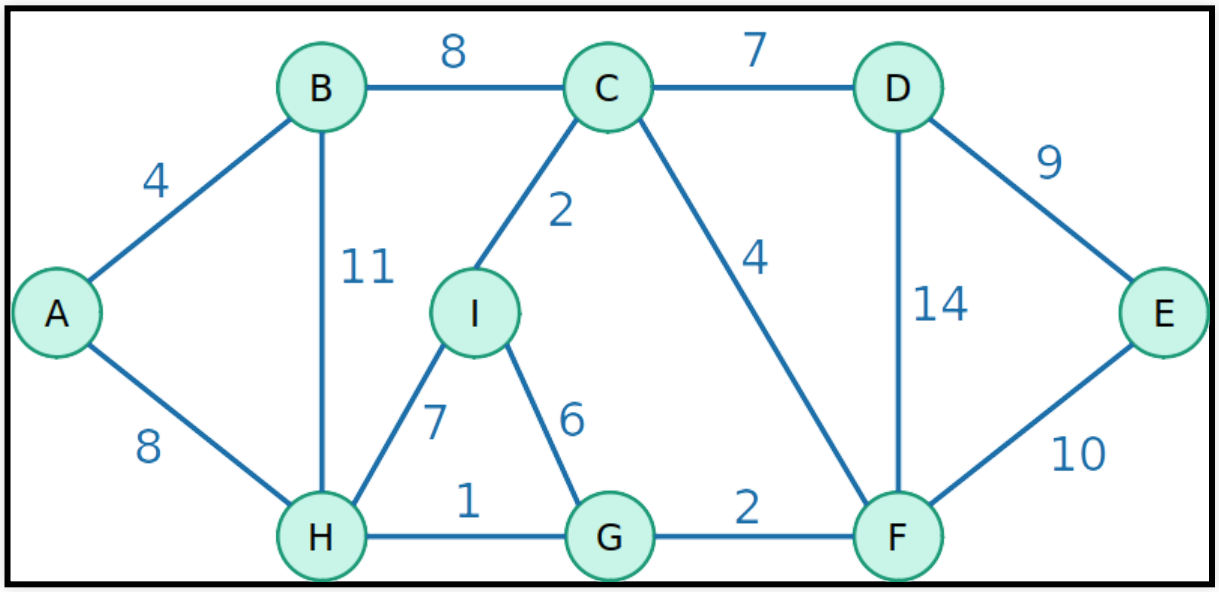
PrimHeap

PrimHeap - Complexidade

- Seja $n = |V(G)|$ e $m = E(G)$.
- Fazemos $O(n)$ remoções da heap, com um tempo total $O(n \log n)$
- O total de alterações é $O(m)$, com um tempo total $O(m \log n)$.
- Assim, o tempo total do algoritmo é $O(m \log n)$.

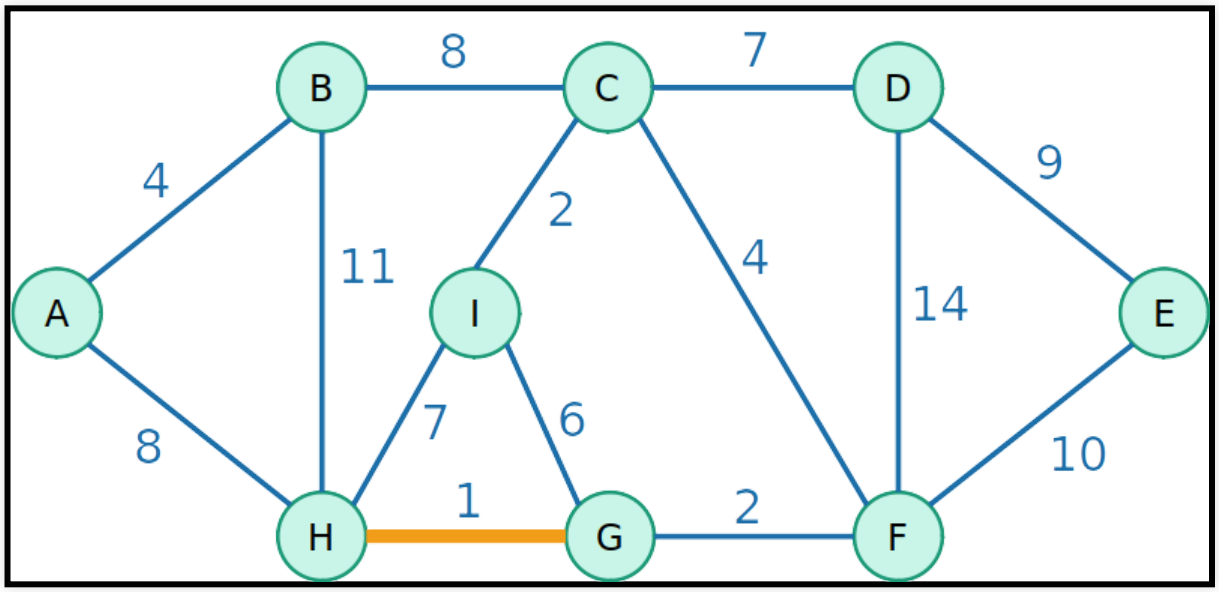
Kruskal

- Vamos testar agora uma outra estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo



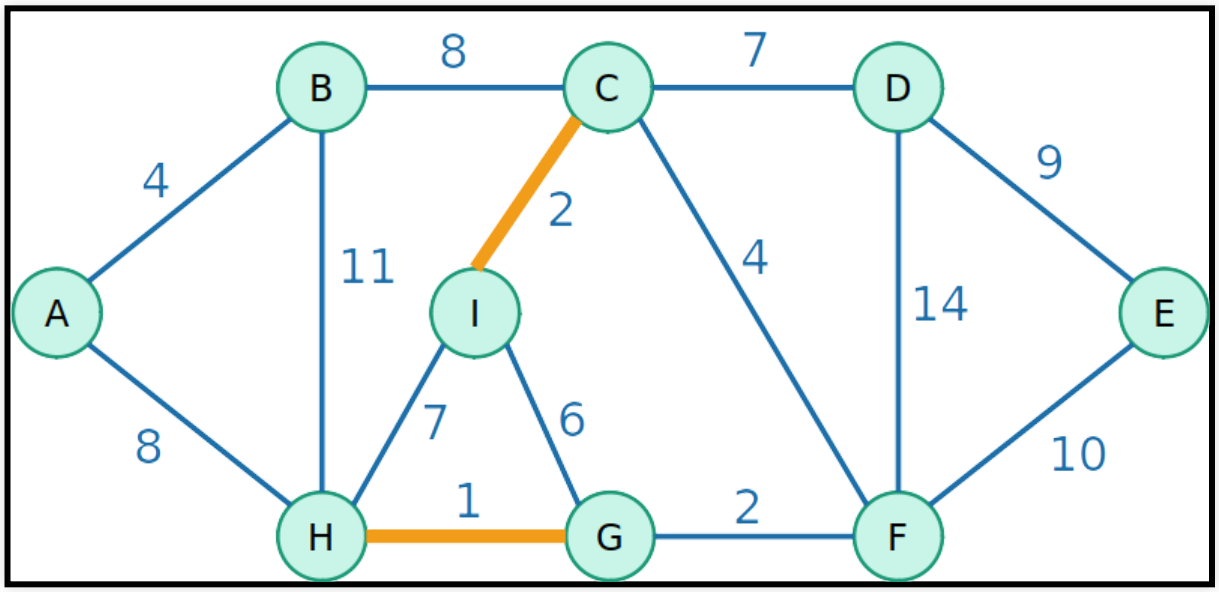
Kruskal

- Vamos testar agora uma outra estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo



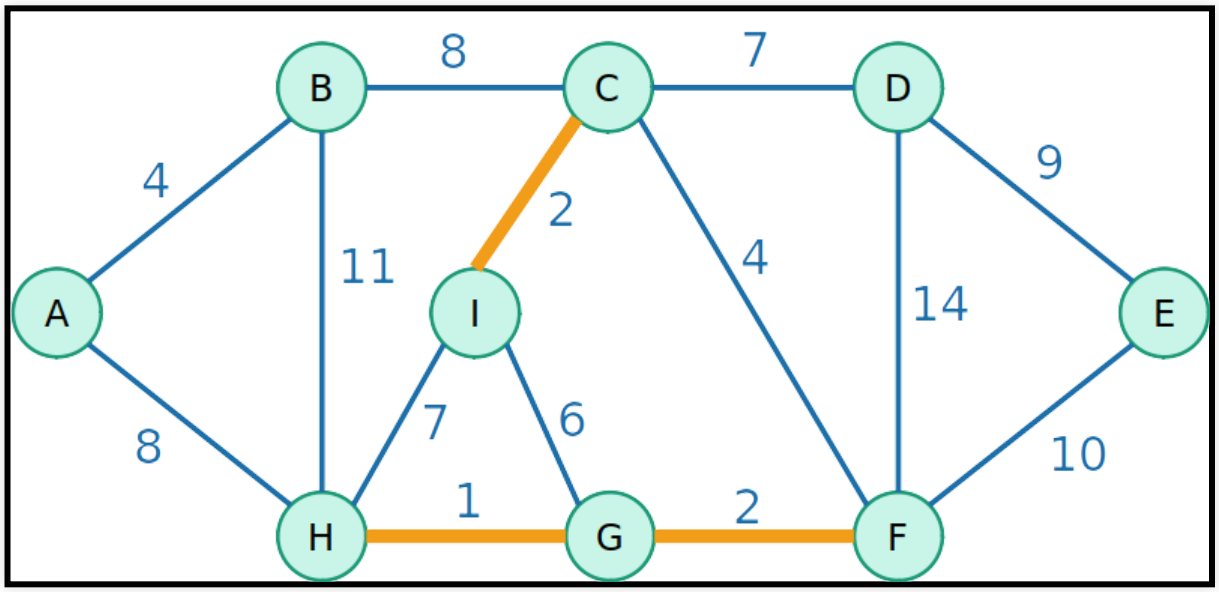
Kruskal

- Vamos testar agora uma outra estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo



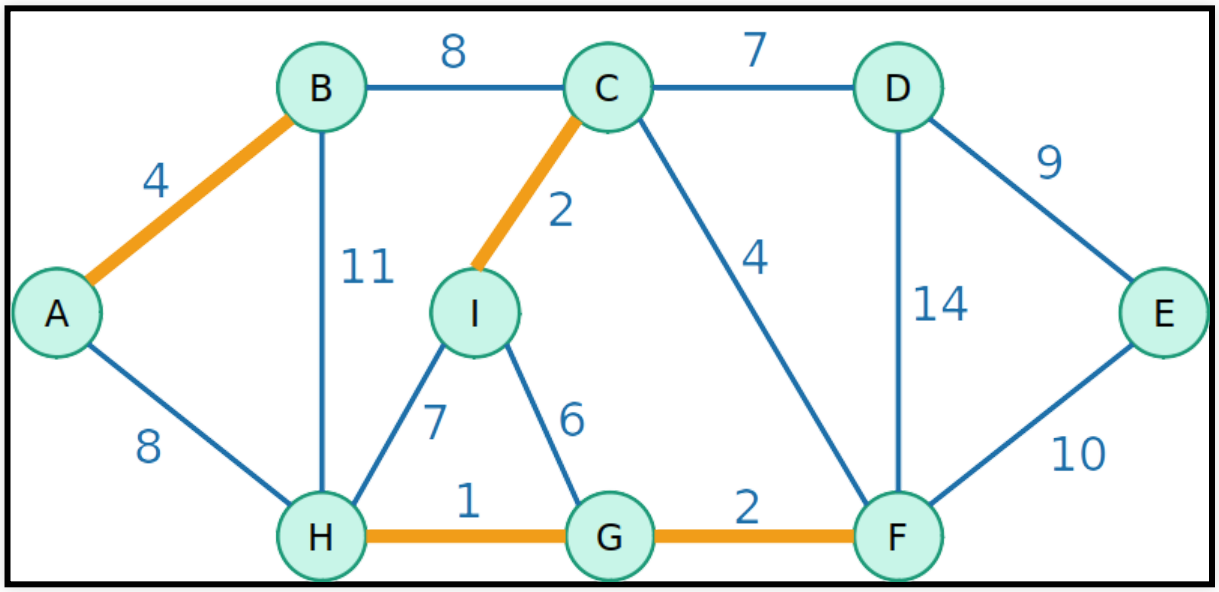
Kruskal

- Vamos testar agora uma outra estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo



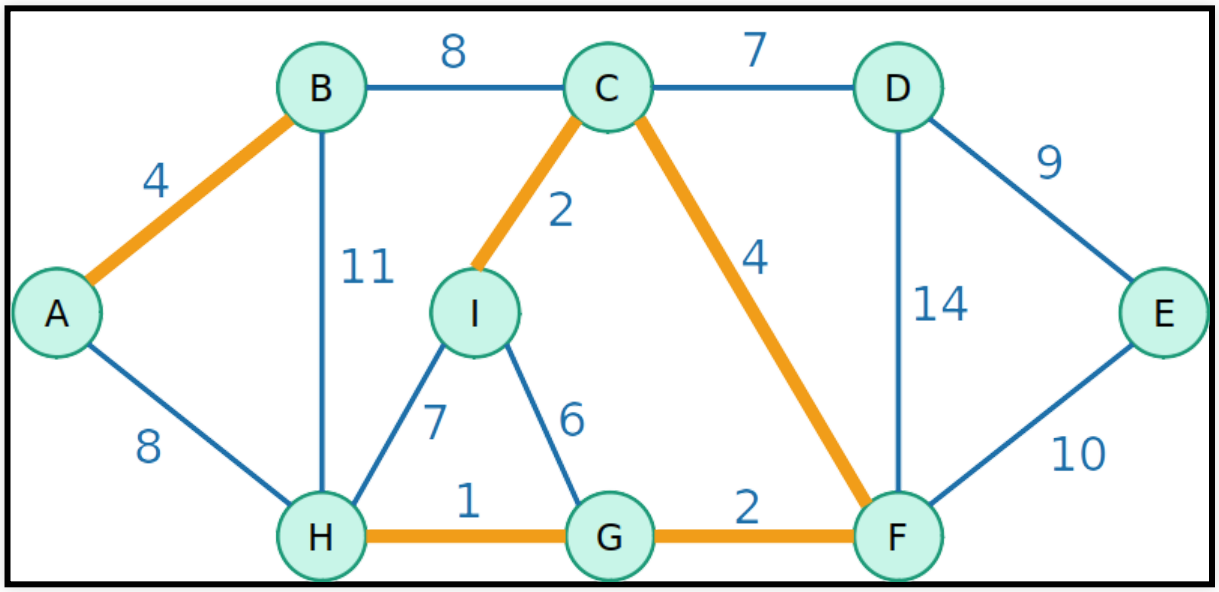
Kruskal

- Vamos testar agora uma outra estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo



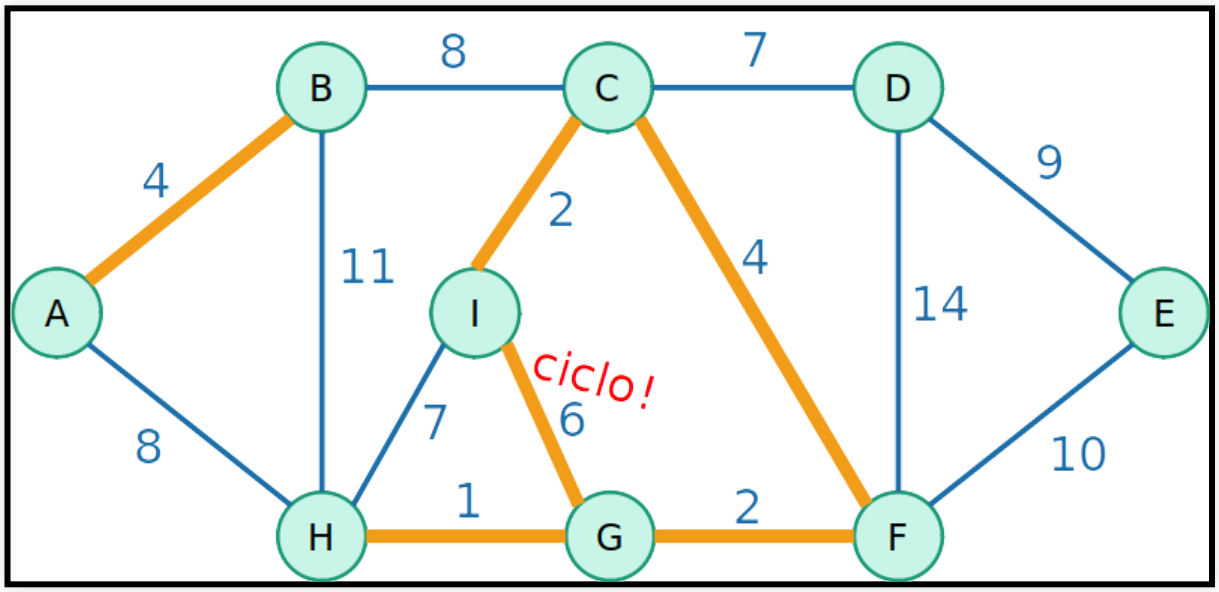
Kruskal

- Vamos testar agora uma outra estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo



Kruskal

- Vamos testar agora uma outra estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo

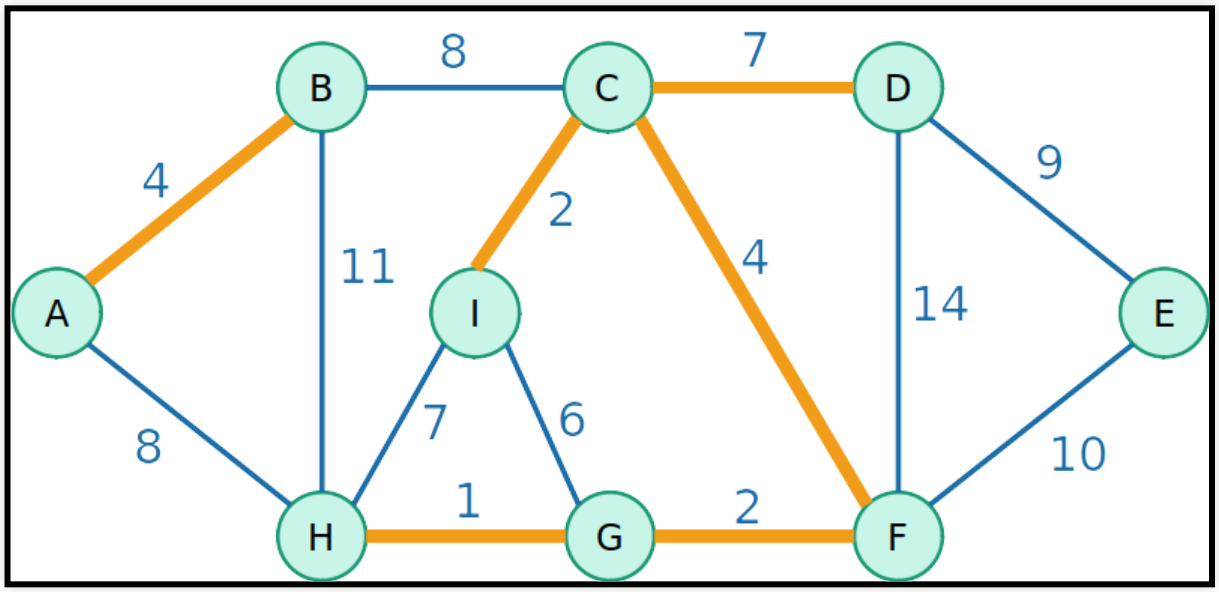


Kruskal

- A estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo pode levar ao aparecimento de ciclos
- Precisamos de uma estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo **e que não gera ciclos**

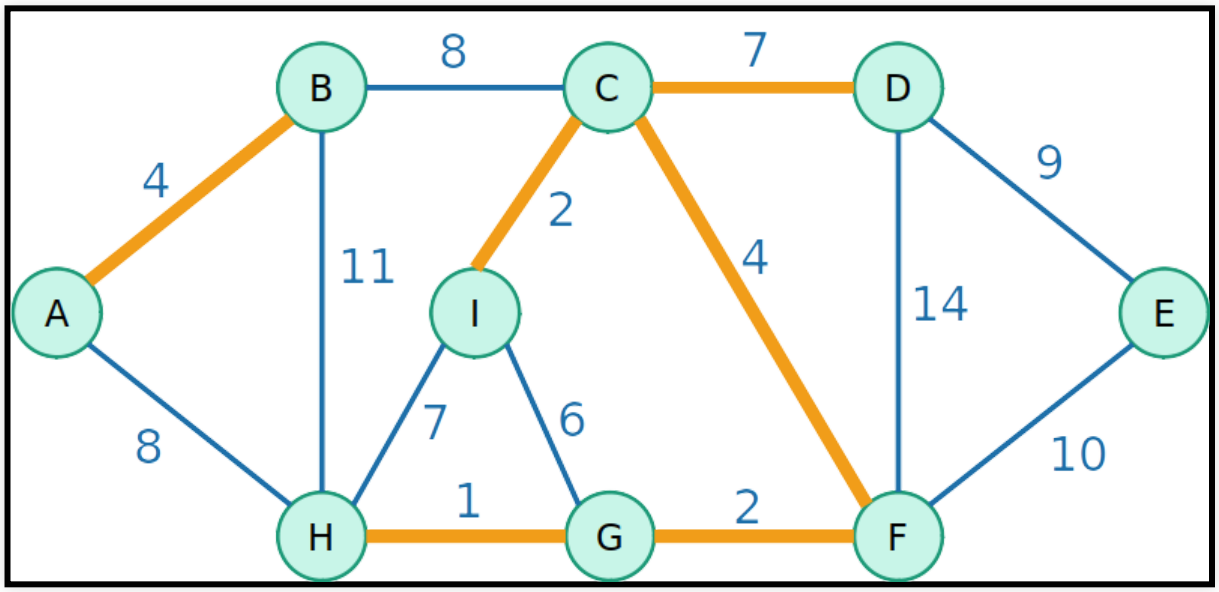
Kruskal

- Vamos testar agora uma outra estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo



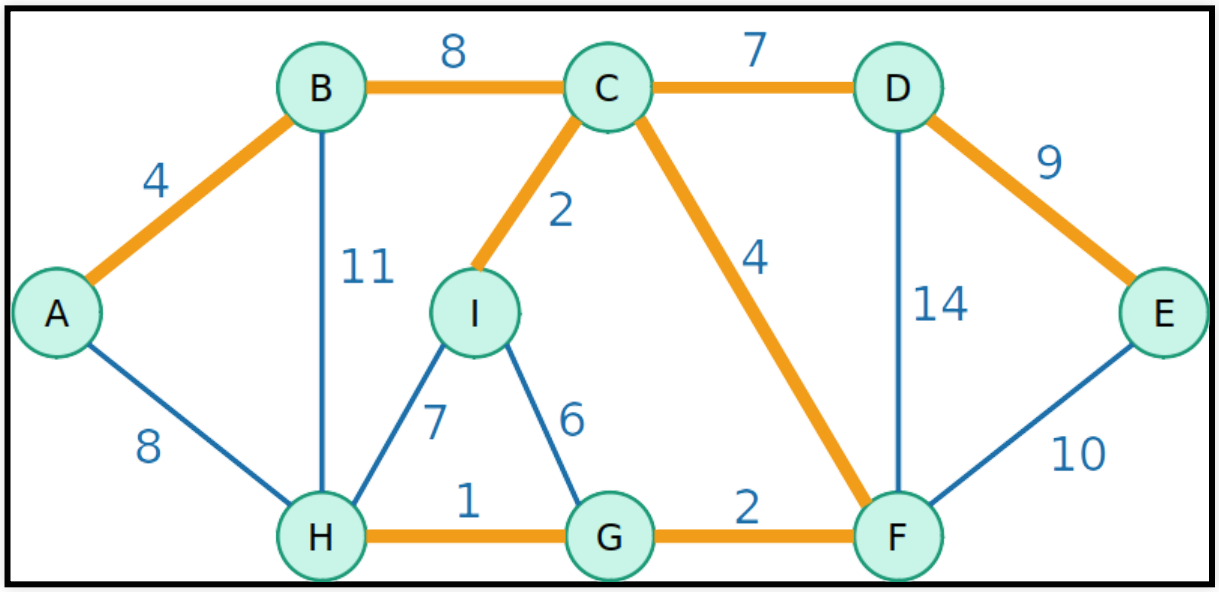
Kruskal

- Vamos testar agora uma outra estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo



Kruskal

- Vamos testar agora uma outra estratégia gulosa de inserir a aresta de menor custo



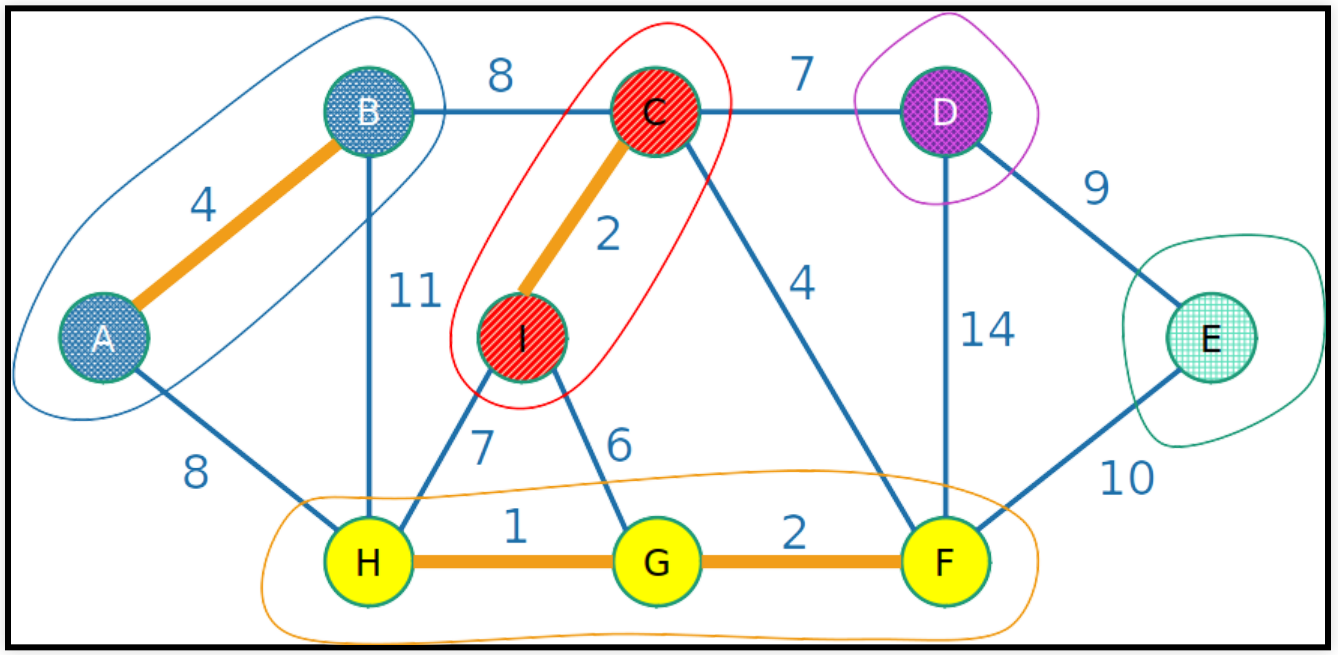
Kruskal

Algoritmo 66: KRUSKAL($G = (V, E)$, w)

```
1 Crie um vetor C[1..|E(G)|] e copie as arestas de G para C
2 Ordene C de modo não-decrescente de pesos das arestas
3 Seja F = ∅
4 para i = 1 até |E(G)| faça
5     se G[F ∪ {C[i]}] não contém ciclos então
6         F = F ∪ {C[i]}
7 retorna F
```

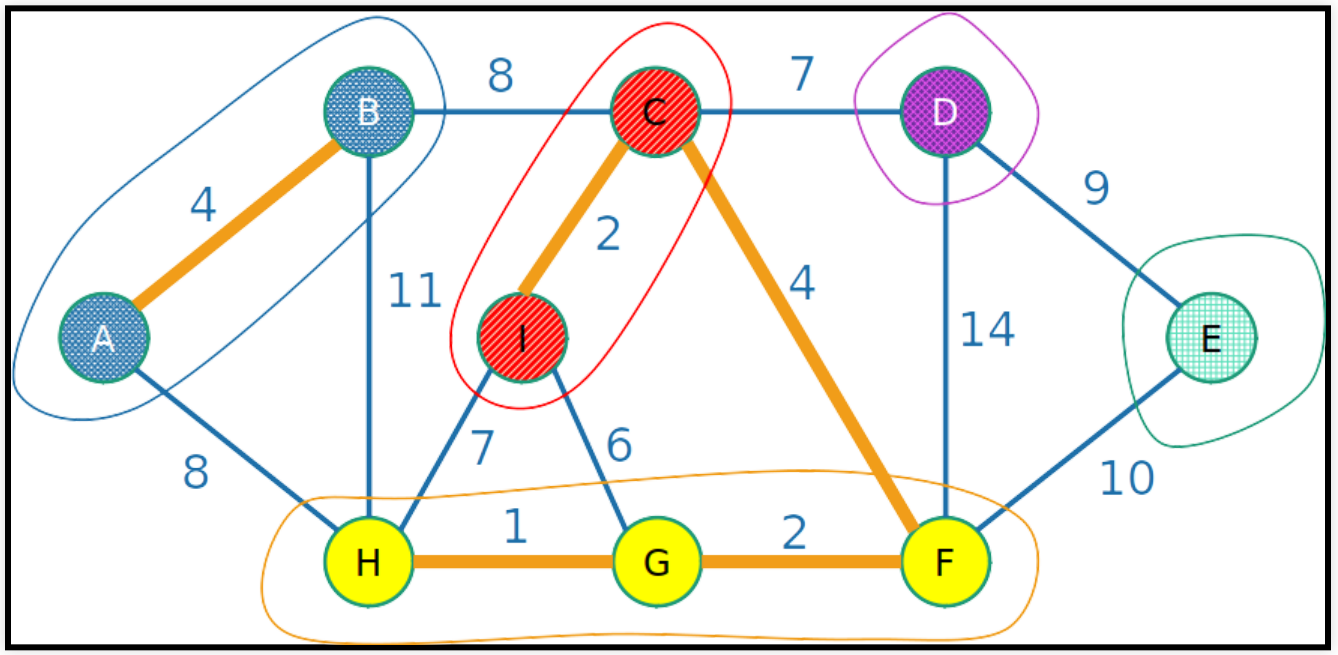
Kruskal

- A cada iteração do algoritmo de Kruskal, estamos mantendo uma floresta (uma coleção de árvores desconexas)



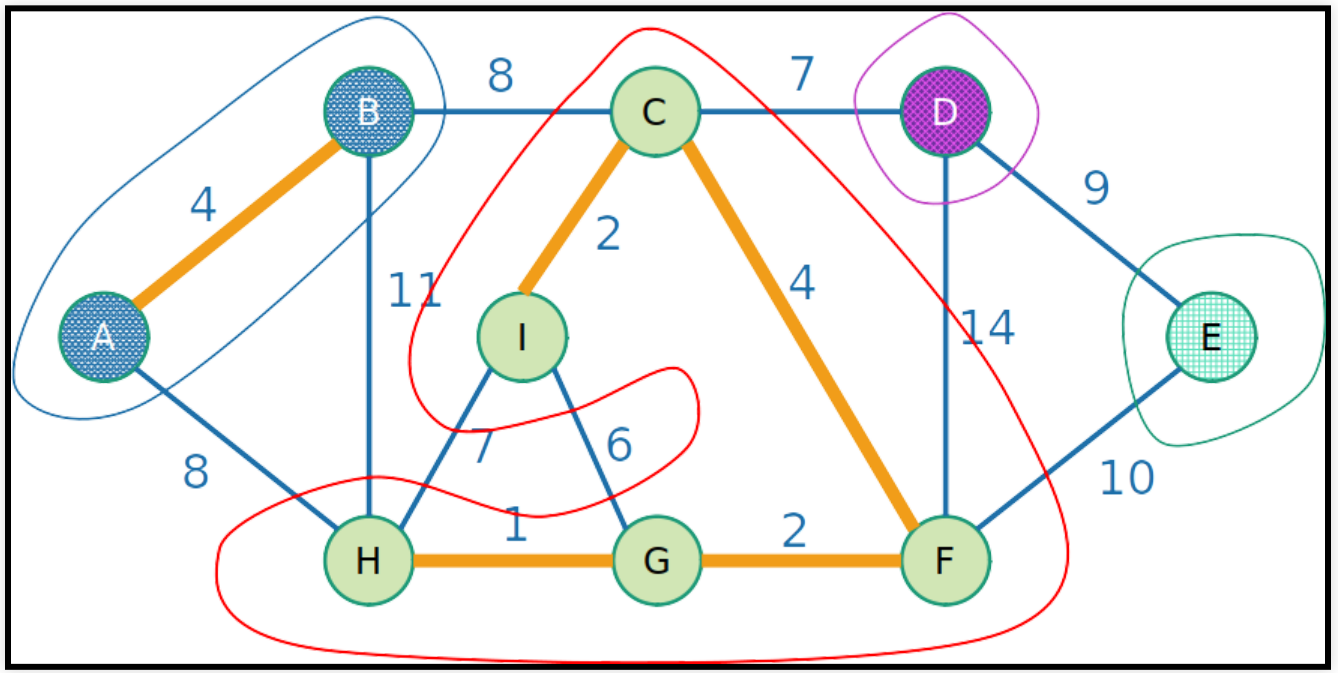
Kruskal

- Quando adicionamos uma aresta, juntamos duas árvores



Kruskal

- Nunca adicionamos uma aresta dentro de uma árvore, senão criaríamos um ciclo



Qual a complexidade?

- Seja $m = |V(G)|$, e $n = |V(E)|$
- O algoritmo adiciona um vértice de cada vez, portanto o laço da linha 3 executa m vezes
- Utilizando um algoritmo de busca para detectar ciclos, ele executa em $O(n + |F|)$, em que F é o número de vértices já inseridos na MST
- A MST tem no máximo $n - 1$ vértices, portanto a busca é feita em $O(n)$
- Utilizando essa estratégia, o algoritmo executa em $O(nm)$

Dá pra fazer melhor?

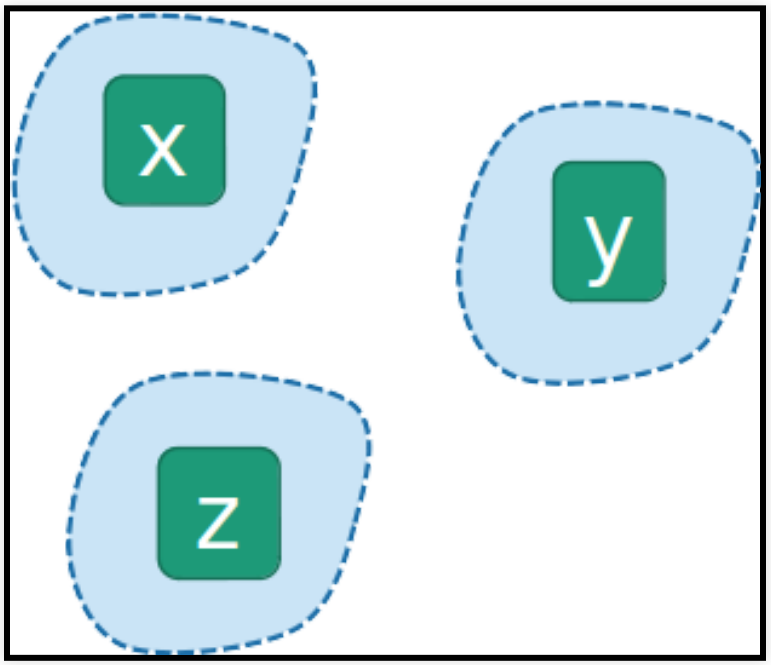
- Para diminuir a complexidade, podemos usar uma estratégia diferente para encontrar ciclos
- Podemos fazer isso usamos uma estrutura de dados que dá suporte à criação, busca e união de conjuntos

UnionFind

- Estrutua de dados que dá suporte as seguintes operações:
  - makeSet(u): cria o conjunto $\{u\}$
  - find(u): retorna o conjunto que u pertence
  - union(u,v): faz a unição dos conjuntos em que u e v pertencem

UnionFind

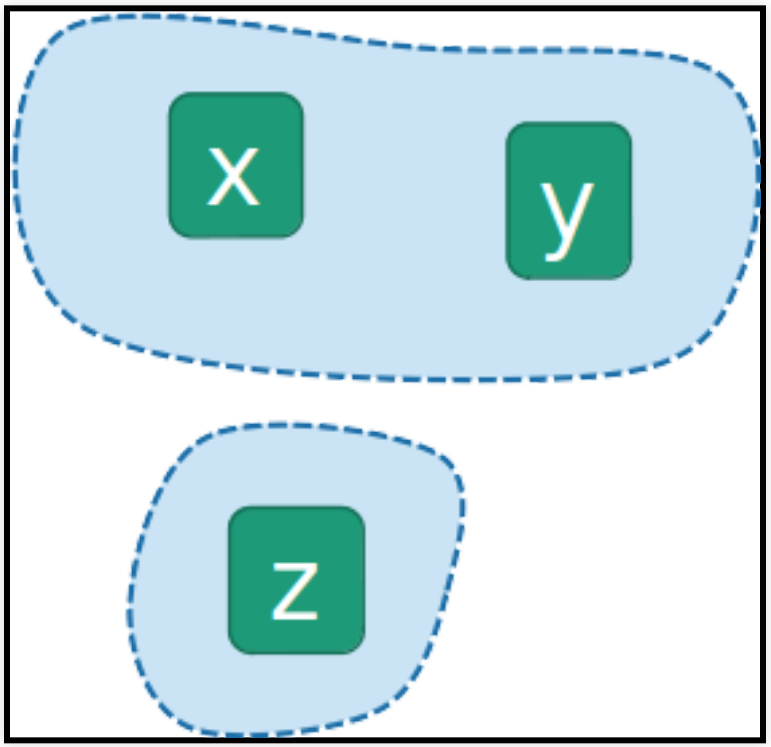
```
makeSet(x)
makeSet(y)
makeSet(z)
```



UnionFind

```
makeSet(x)
makeSet(y)
makeSet(z)

union(x,y)
```

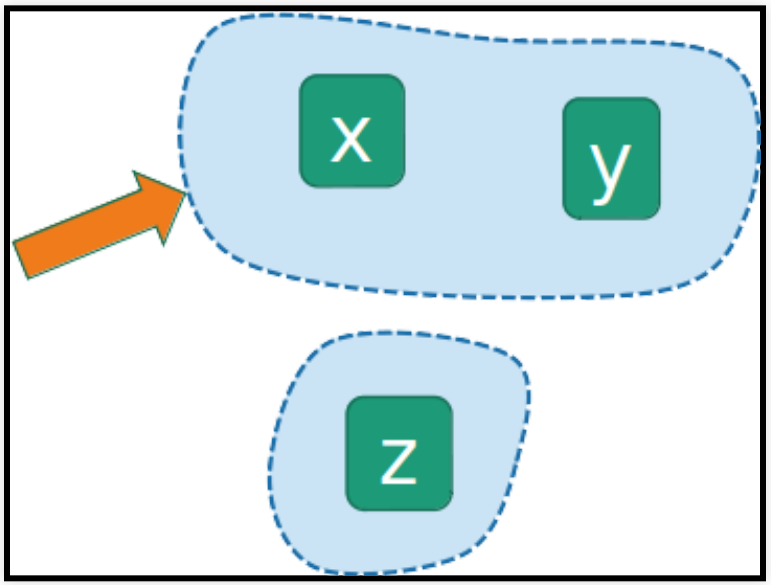


UnionFind

```
makeSet(x)
makeSet(y)
makeSet(z)

union(x,y)

find(x)
```



UnionFind

- Conjuntos pedem ser representados por listas encadeadas.
- Cada elemento tem um representante, que é a cabeça da lista
  - Consultar a qual conjunto um elemento pertence é feita em $O(1)$, pois simplesmente retornamos quem é o seu representante
- Na união de dois conjuntos, fazemos a cauda de uma das listas apontar para cabeça da outra (unindo as duas listas)
  - Tem complexidade $\min(|L_1|, |L_2|)$

UnionFind

Algoritmo 24: MAKESET(x)

```
1 x.representante = x
2 x.tamanho = 1
3 L[x].cabeca = x
4 L[x].cauda = x
```

Algoritmo 25: FINDSET(x)

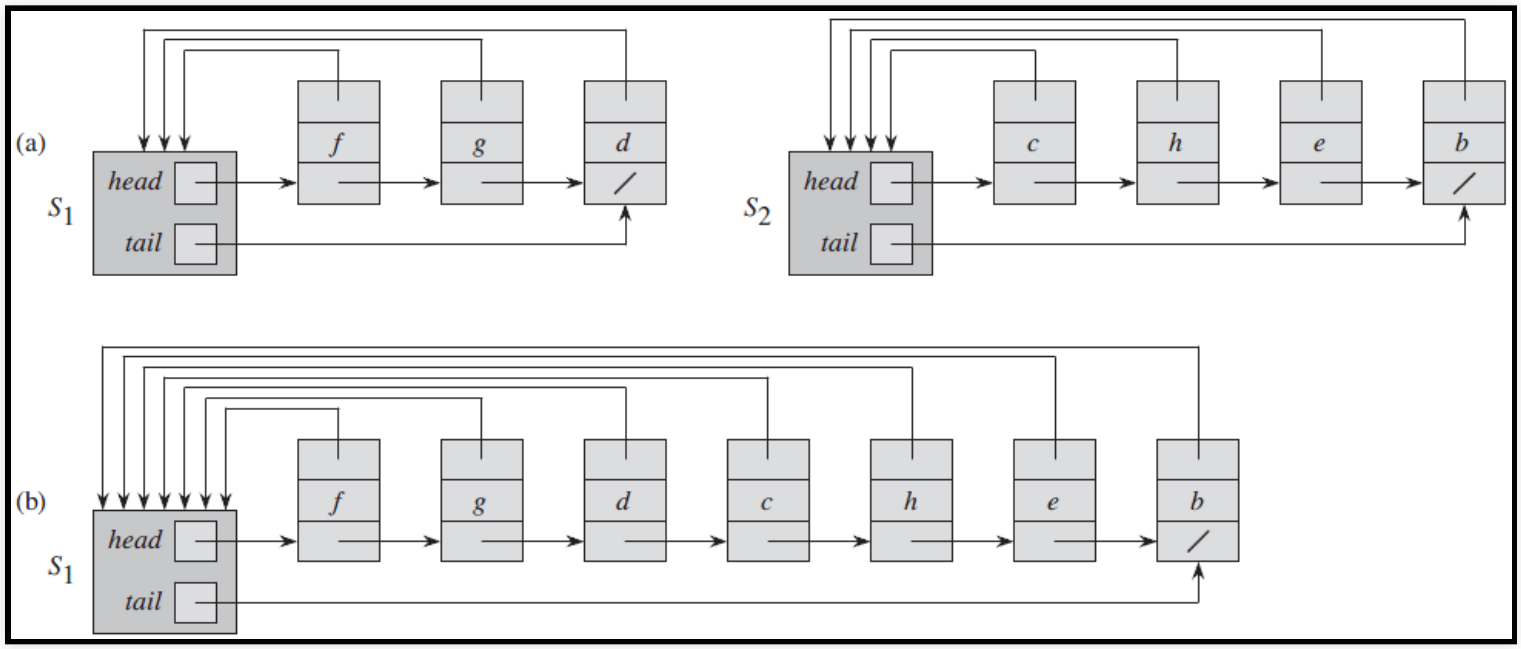
```
1 retorna x.representante
```

UnionFind

Algoritmo 26: UNION(x, y)

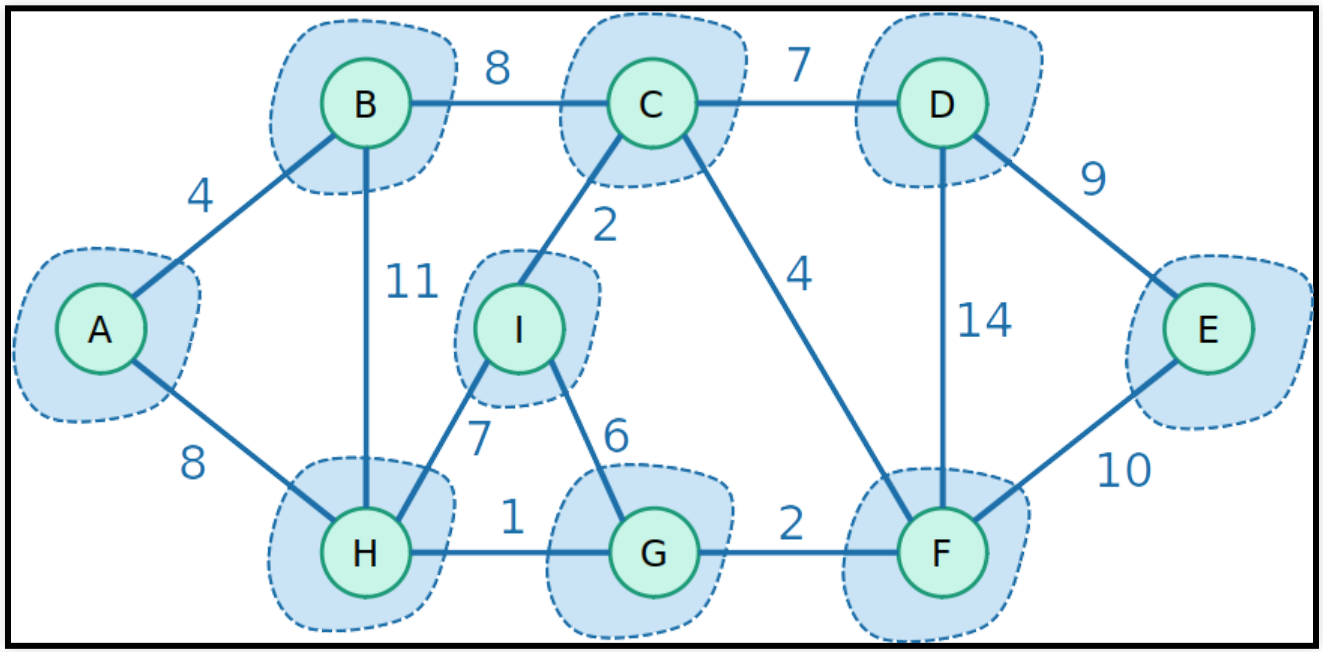
```
1  X = FindSet(x)
2  Y = FindSet(y)
3  se X.tamanho < Y.tamanho então
4      para todo v em L[X] faça
5          v.representante = Y
6          v.tamanho = X.tamanho + Y.tamanho
7      L[Y].cauda.proximo = L[X].cabeca
8      L[X].cabeca = null
9  senão
10     para todo v em L[Y] faça
11         v.representante = X
12         v.tamanho = X.tamanho + Y.tamanho
13     L[X].cauda.proximo = L[Y].cabeca
14     L[Y].cabeca = null
```

UnionFind



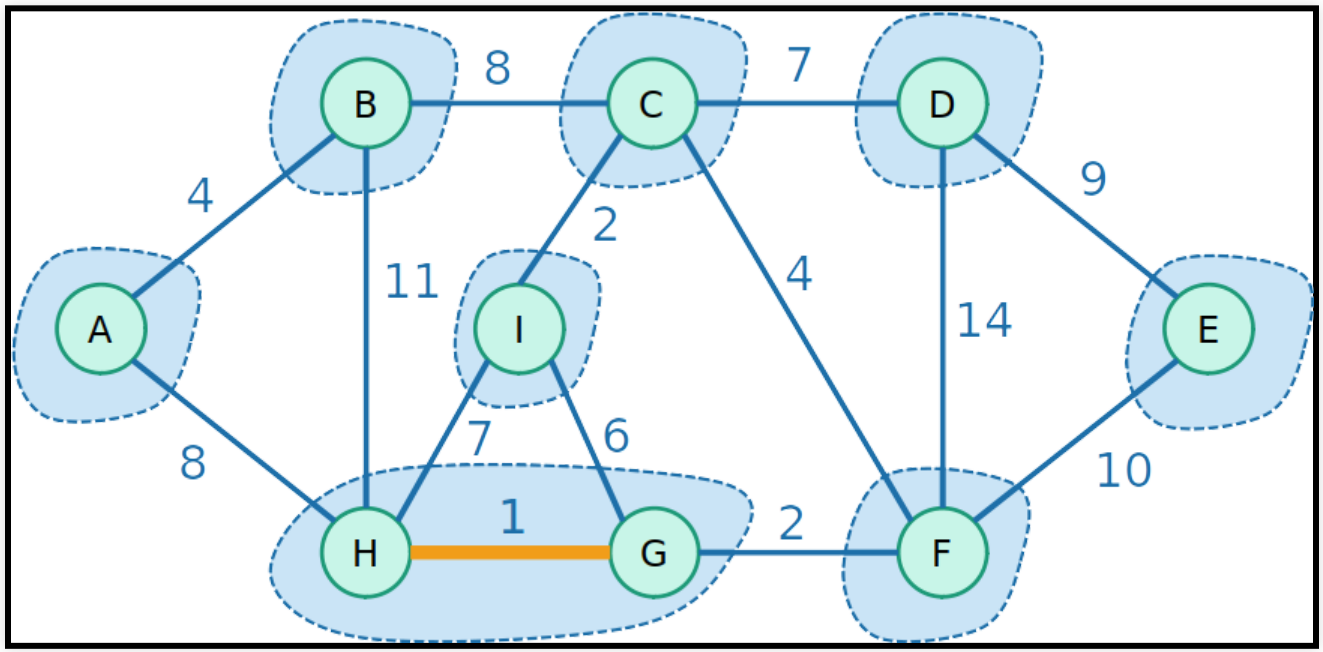
Kruskal com Union-Find

- Inicialmente, cada vértice é a sua própria árvore, e cada conjunto tem um vértice



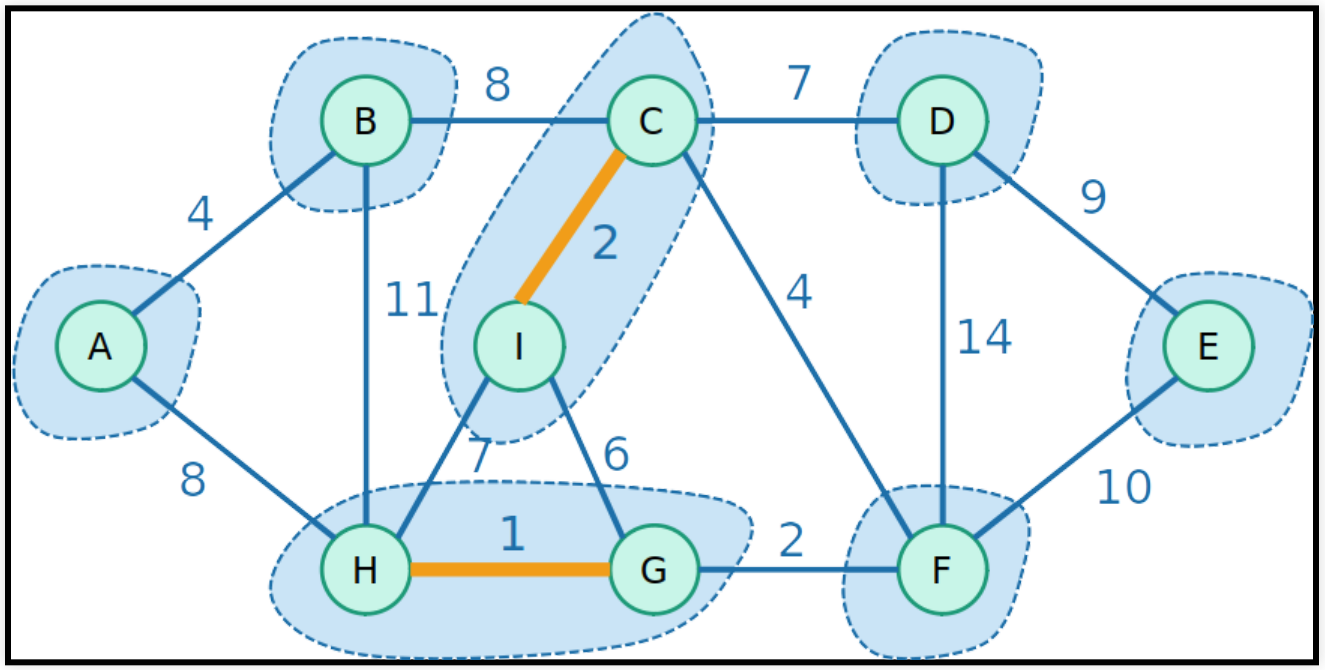
Kruskal com Union-Find

- Então começamos a unir os conjuntos



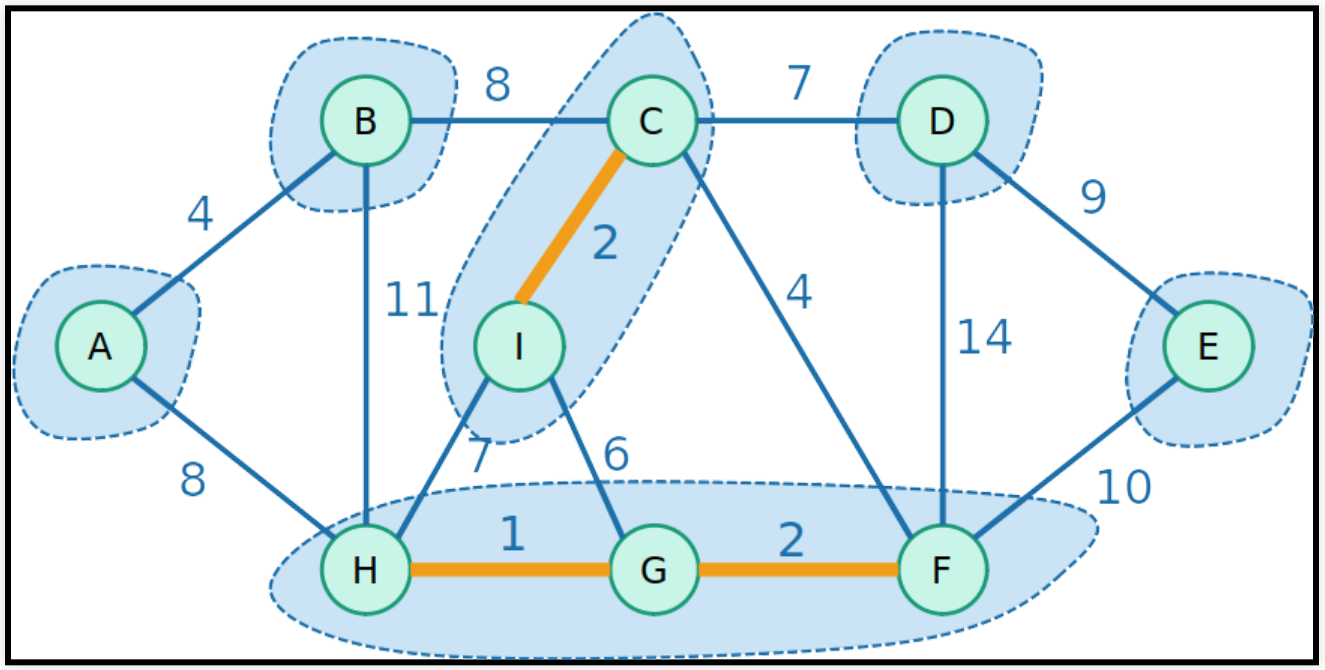
Kruskal com Union-Find

- Então começamos a unir os conjuntos



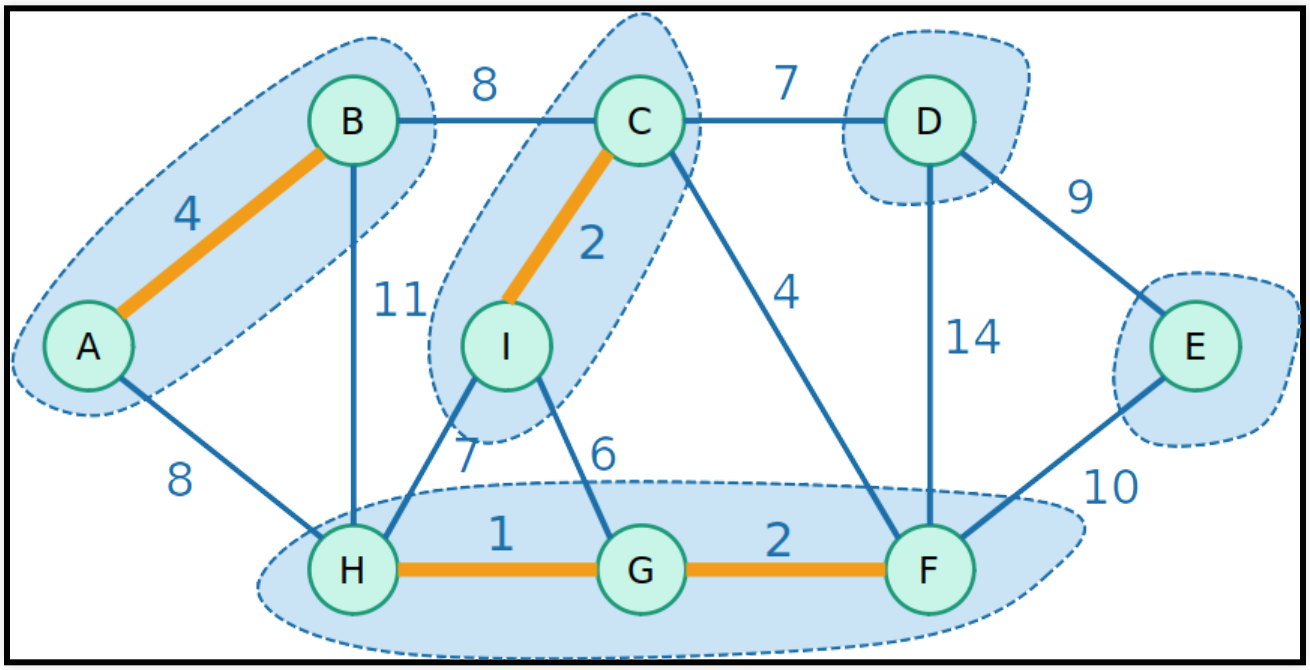
Kruskal com Union-Find

- Então começamos a unir os conjuntos



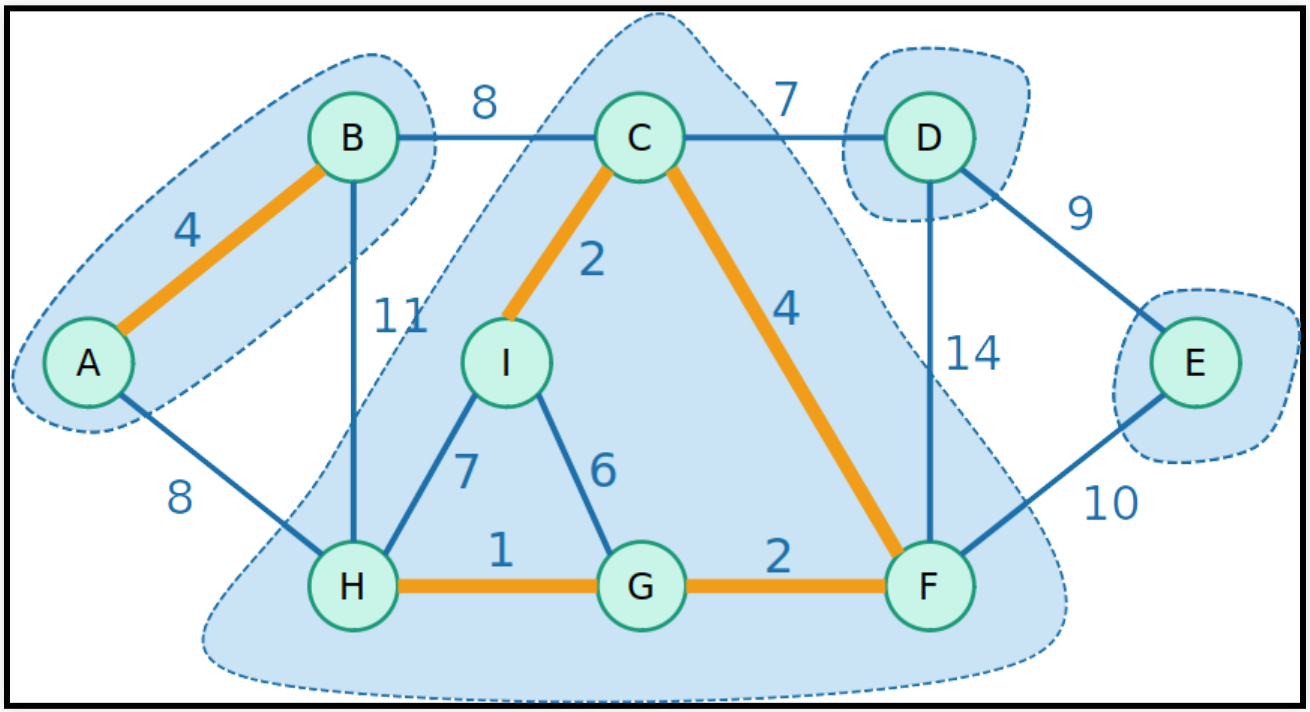
Kruskal com Union-Find

- Então começamos a unir os conjuntos



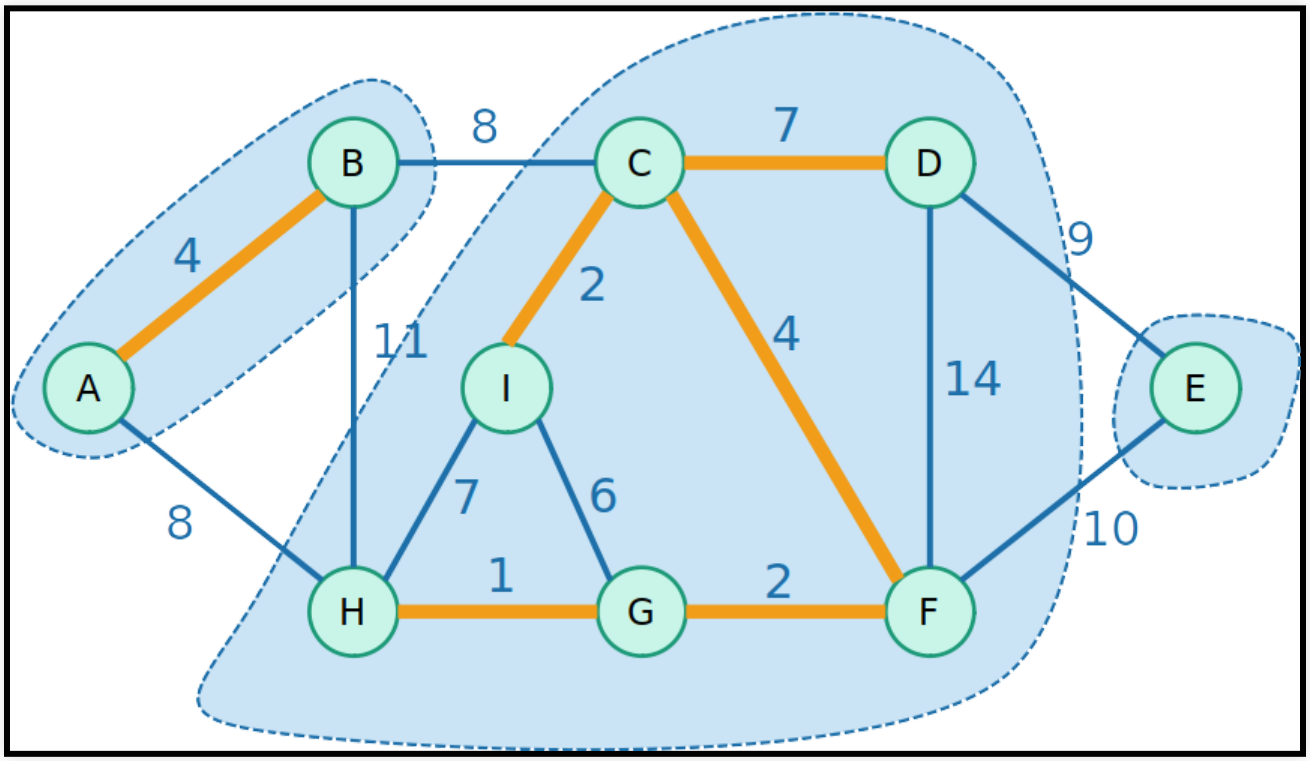
Kruskal com Union-Find

- Então começamos a unir os conjuntos



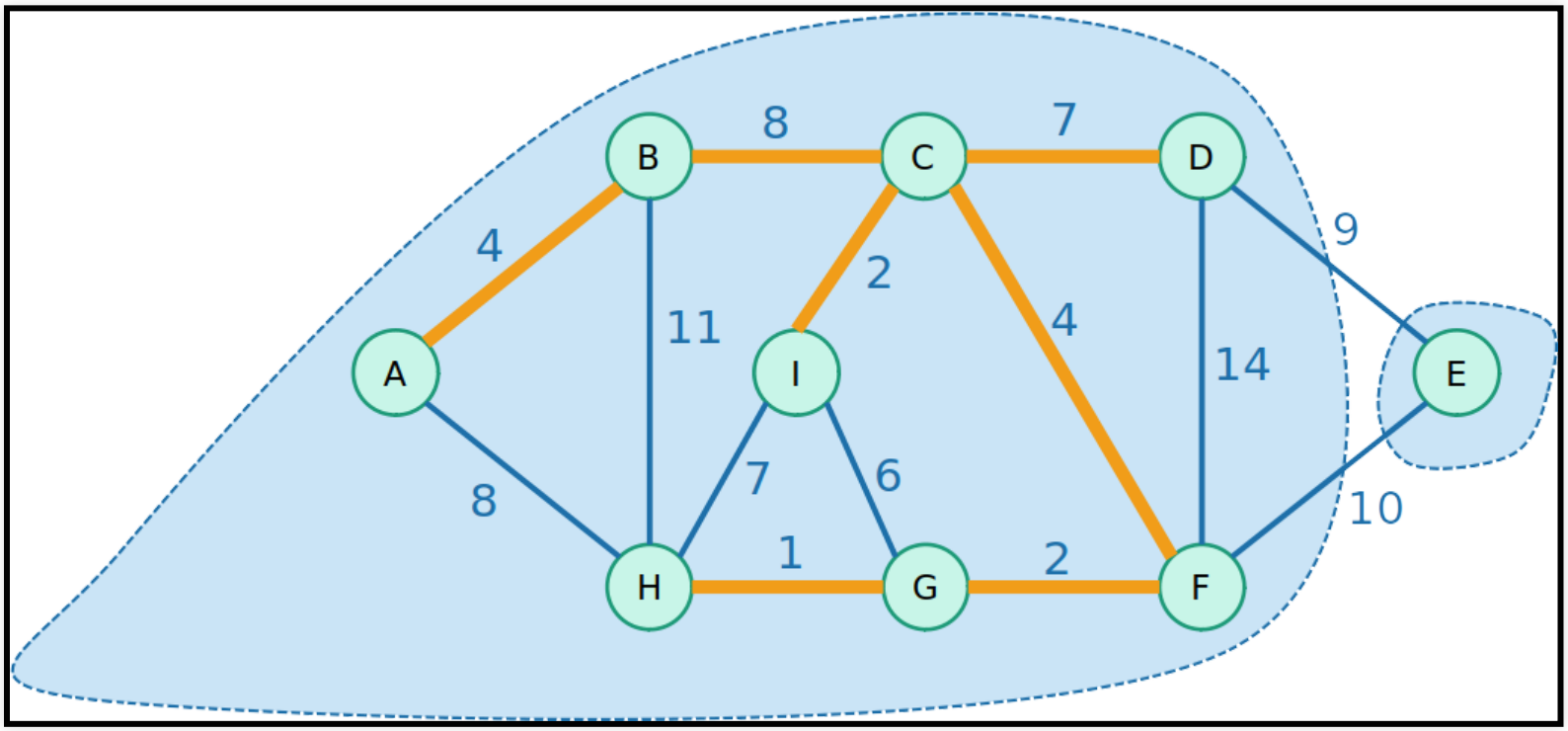
Kruskal com Union-Find

- Então começamos a unir os conjuntos



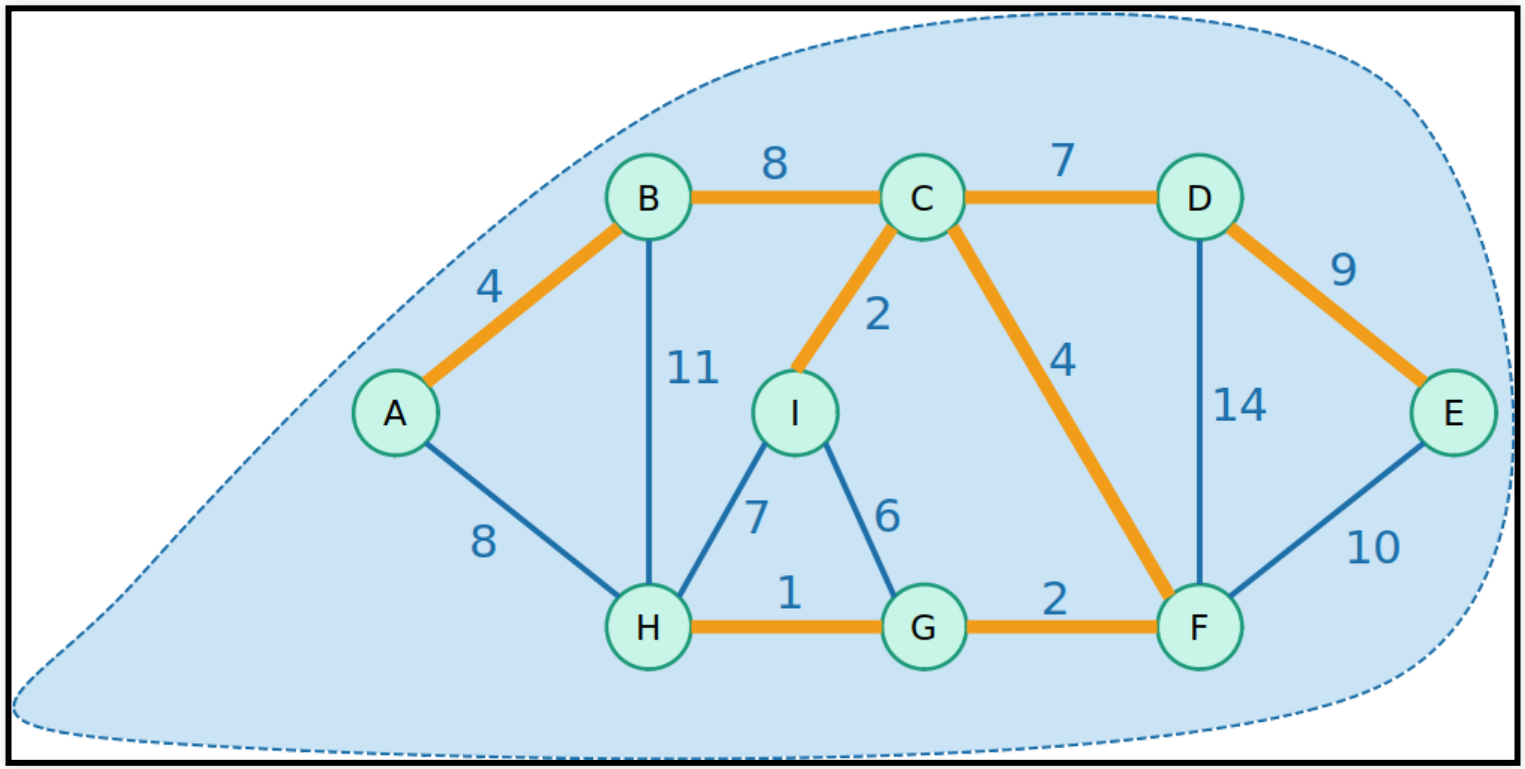
Kruskal com Union-Find

- Então começamos a unir os conjuntos



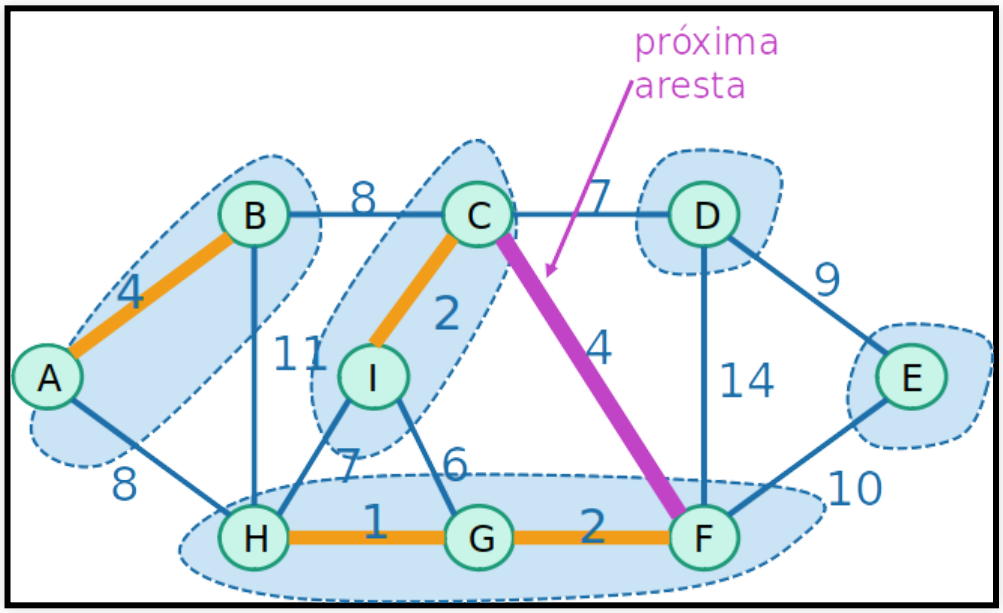
Kruskal com Union-Find

- Até incluir todos os nós



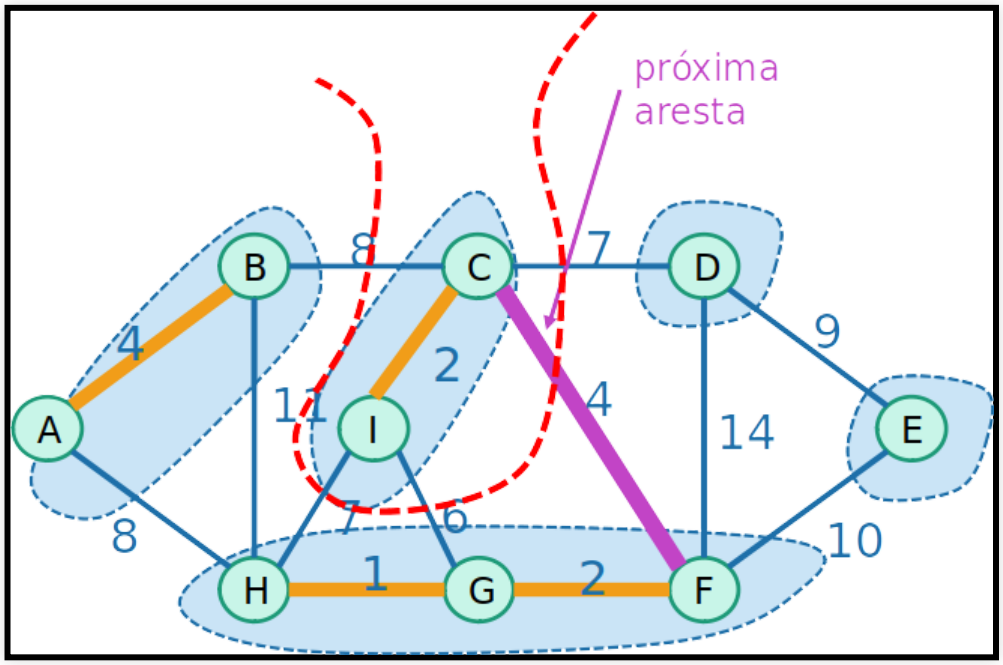
Funciona?

- Cosidere a próxima aresta que iremos incluir



Funciona?

- Considere o corte formato por $\{T_1, V - T_1\}$



- A próxima aresta é uma aresta leve, e portanto segura de ser inserida
- Usando essa propriedade, é possível provar por indução que o algoritmo funciona.

Kruskal com Union-Find

Algoritmo 67: KruskalUnionFind($G = (V, E)$, w)

```
1  Crie um vetor C[1..|E(G)|] e copie as arestas de G para C
2  Ordene C de modo não-decrescente de pesos das arestas
3  Seja F = ∅
4  para todo vértice v ∈ V(G) faça
5      MakeSet(v)
6  para i = 1 até |E(G)| faça
7      Seja uv a aresta em C[i]
8      se FindSet(u) ≠ FindSet(v) então
9          F = F ∪ {C[i]} Union(u, v)
10 retorna F
```

Qual é a complexidade?

- Seja $n = |V(G)|$ e $m = E(G)$.
- O laço da linha 6 executa $O(m)$ vezes
- Dentro do laço, a etapa mais custosa é a união de dois conjuntos.
  - Quando unimos dois conjuntos, a operação mais custosa é atualizar o representante do menor deles.
  - Entretanto, o menor deles pelo menos dobra de tamanho.
  - O número de atualizações é, portanto, $O(\log n)$
- Portanto a complexidade do algoritmo é $O(m \log n)$

Comparação