Análise de Algoritmos

Ronaldo Cristiano Prati

Bloco A, sala 513-2

ronaldo.prati@ufabc.edu.br

Representação textual

- Caracteres são representados computacionalmente usando o código `ascii` out `utf`
- Número fixo de bits por caracter
- Mapeamento um para um de caracter para um conjunto de bits
- Total de bits = número de caracteres $\times$ bits por caracter

Representação textual

- Linguas no entanto tem um predominância do uso de alguns caracteres

```
uma sentença simples

01110101 01101101 01100001 00100000 01110011 01100101
01101110 01110100 01100101 01101110 11100111 01100001
00100000 01110011 01101001 01101101 01110000 01101100
01100101 01110011
```

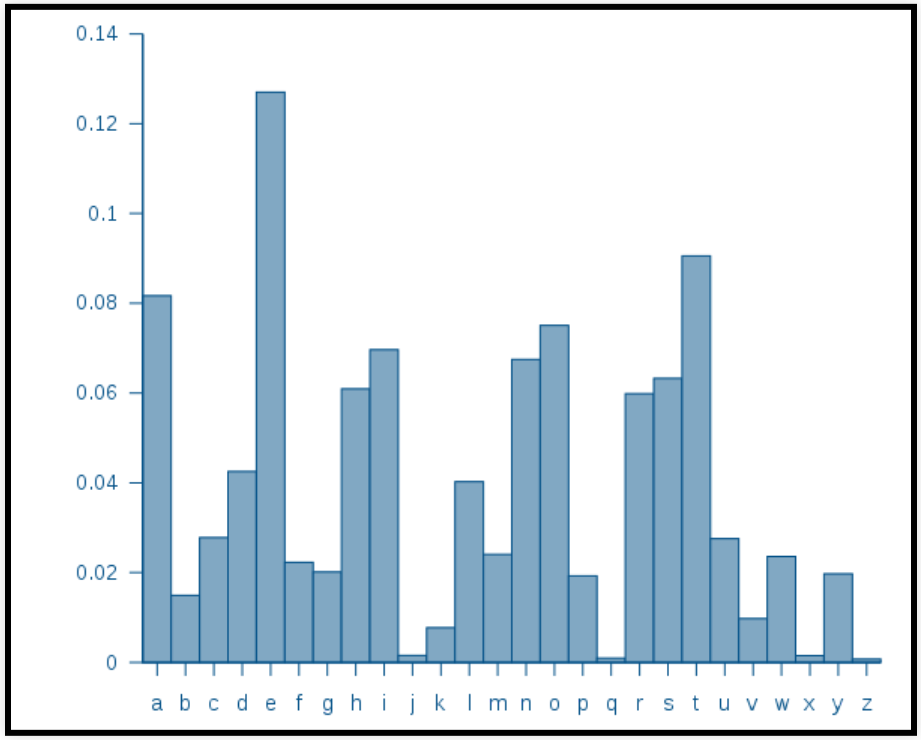
- Ao contrário de "textos aleatórios", em que a distribuição é uniforme

```
qwertyui_opasdfg+hjklzxcv

01110001 01110111 01100101 01110010 01110100 01111001
01110101 01101001 01011111 01101111 01110000 01100001
01110011 01100100 01100110 01100111 00101011 01101000
01101010 01101011 01101100 01111010 01111000 01100011
01110110
```

Representação textual

- Suponha que temos alguma distribuição a respeito do uso de caracteres

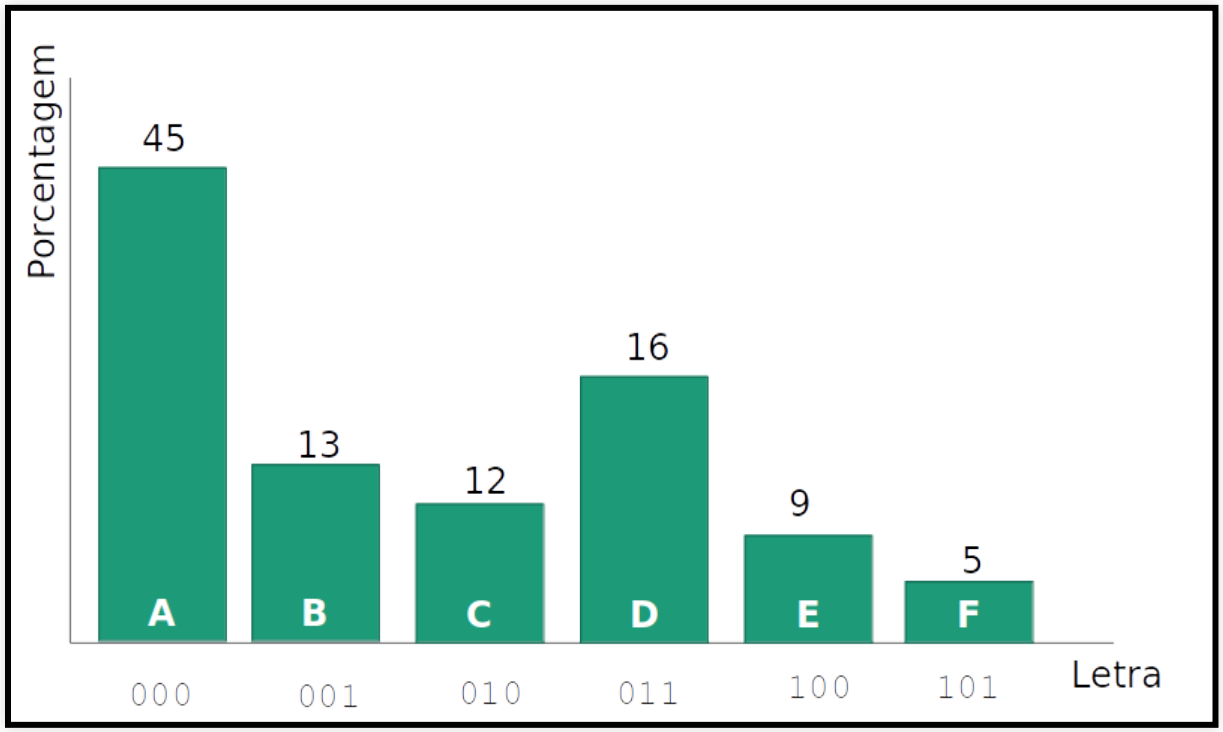


Representação textual

- Sem perda de generalidade, considere um alfabeto de 6 letras
- Como podemos codificar de maneira eficiente e não ambígua esses caracteres?

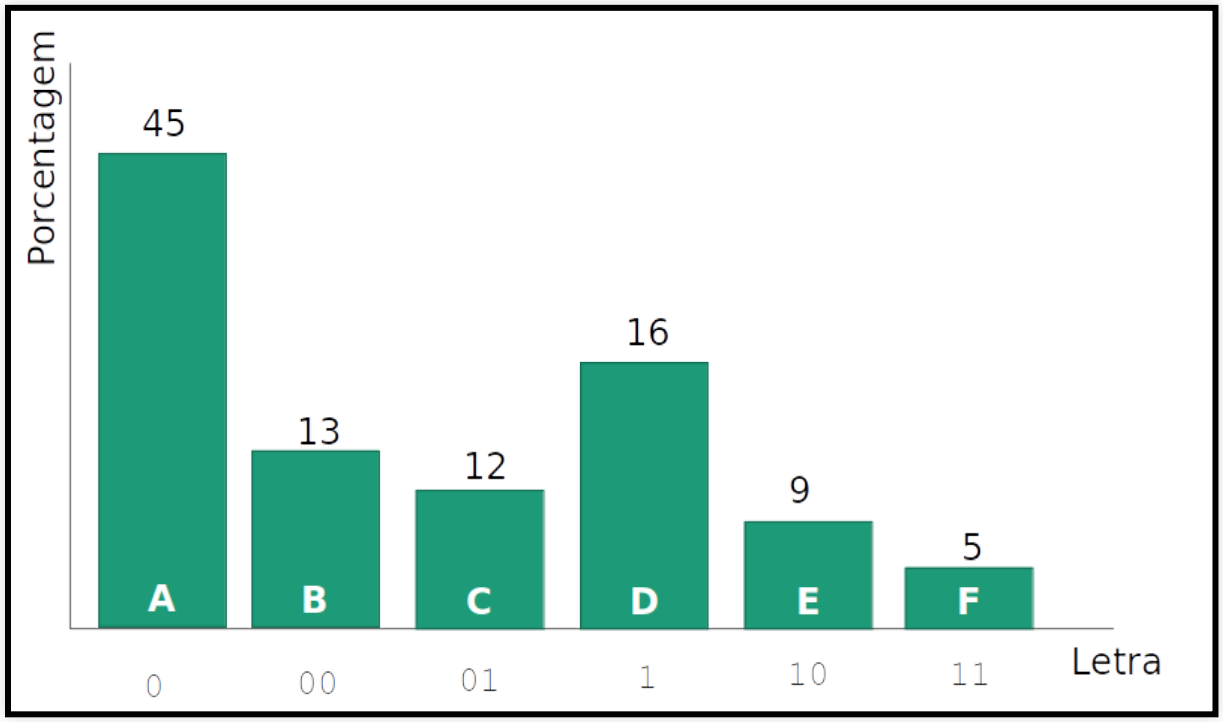
Representação textual

- **Tentativa 1:** Usando um número fixo de bits por caracter, os códigos `110` e `111` nunca são usados
- Uma representação compacta de 'A' economizaria espaço


Porcentagem
45
13
12
16
9
5
A
B
C
D
E
F
000
001
010
011
100
101
Letra

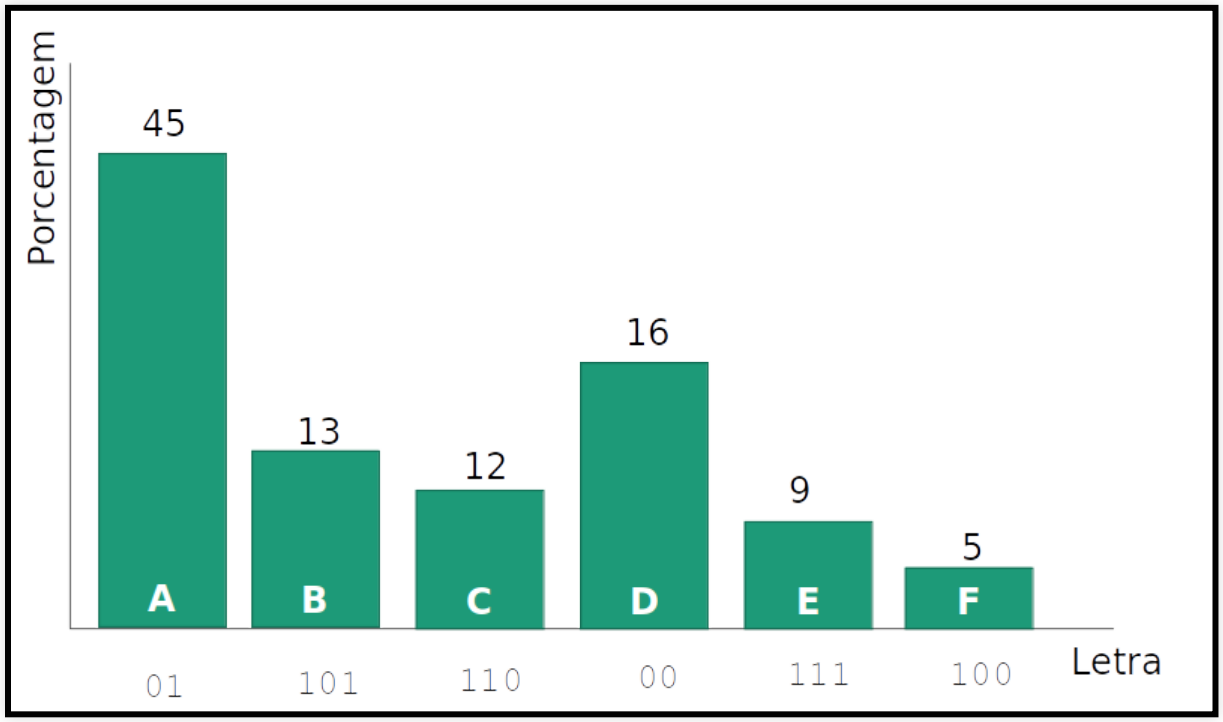
Representação textual

- **Tentativa 2:** Usando um número variável por caracter, em que as letras mais frequentes usam uma codificação menor, podemos ter ambiguidade
- 000 significa 'AAA' ou 'AB' ?


Porcentagem
45
13
12
16
9
5
A
B
C
D
E
F
0
00
01
1
10
11
Letra

Representação textual

- **Tentativa 3:** Usando um número variável por caracter, em que as letras mais frequentes usam uma codificação menor, mas que nenhum código seja o **prefixo** de outro.
  - Tente decodificar `10010101`

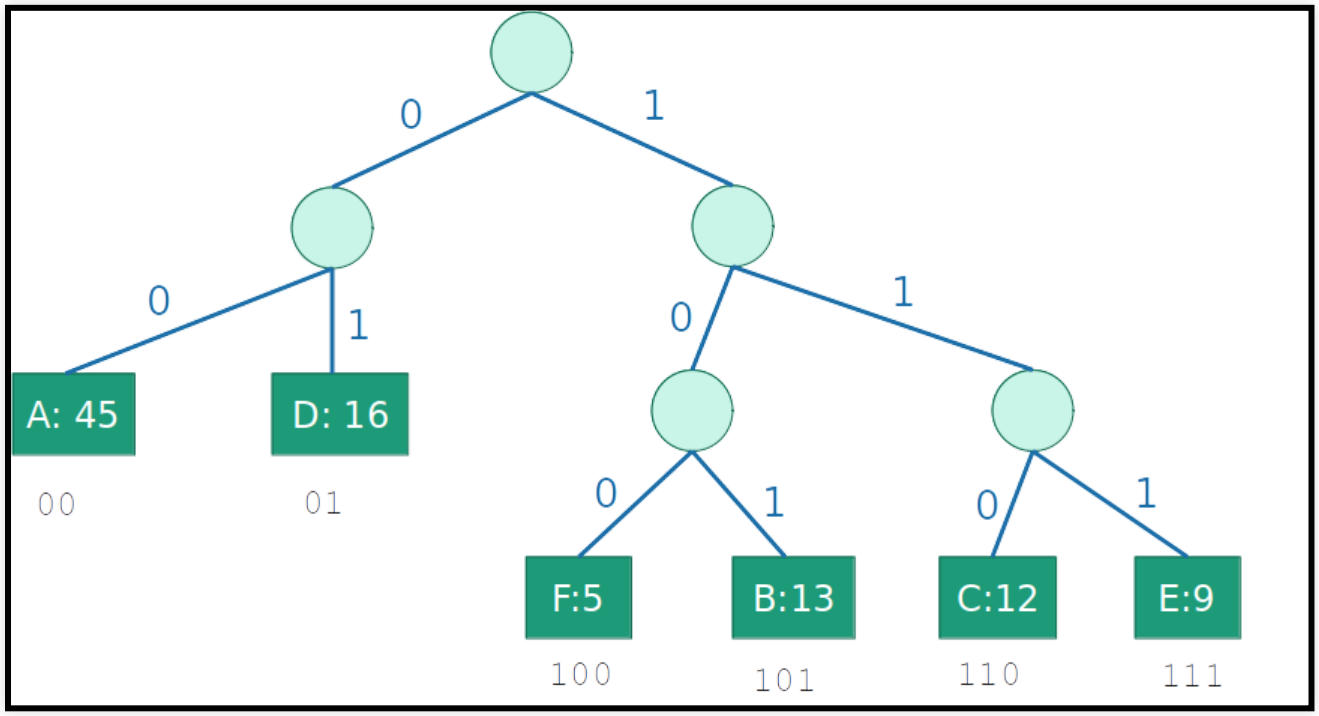

Porcentagem
45
13
12
16
9
5
A
B
C
D
E
F
01
101
110
00
111
100
Letra

Representação livre de prefixo

- Qual é a maneira mais eficiente de criar uma códificação livre de prefixos?
- Como podemos usar o menor número possível de bits, sem criar um código ambíguo?

Árvore de prefixo

- Um código livre de prefixo pode ser represetado por uma árvore binária
  - As letras aparecem nas folhas
  - Uma ramificação à esquerda significa um '0', e a direita um '1'
  - O código para uma letra é a concatenação dos bits da raíz a folha


0
1
0
1
0
1
A: 45
D: 16
00
01
0
1
0
1
F:5
B:13
C:12
E:9
100
101
110
111

Quão boa é a árvore?

- Suponha que selecionamos uma letra aleatóriamente a partir de uma língua.
  - A probabilidade não é uniforme, ela segue a distribuição (o histograma)
- O **custo da árvore** é o tamanho esperado da codificação daquela letra

$$C(T) = \sum_{x \in folhas(T)} P(x) \cdot d_T(x)$$

  - Em que $d_T(x)$ é a distância da raíz até a folha (altura) do caracter 'x'
  - No nosso exemplo:

$$C = 2(0,45 + 0,16) + 3(0,05 + 0,13 + 0,12 + 0,09) = 2,39$$

Problema

- Dada uma distribuição $P(x)$ sobre um conjunto de caracteres, como encontrar a árvore de custo mínimo?

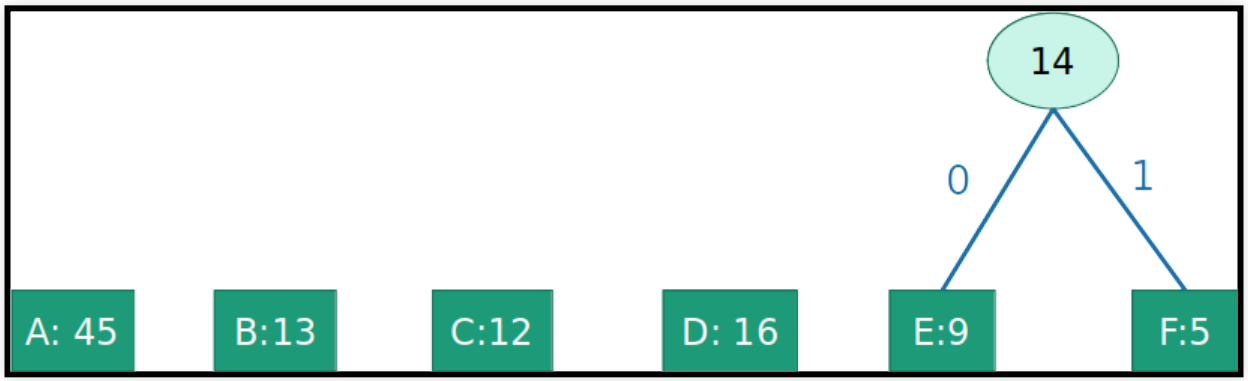
$$C(T)_{minimo} = \min \sum_{x \in folhas(T)} P(x) \cdot d_T(x)$$

Estratégia gulosa

- Gulosamente construir sub-árvores de baixo para cima
- Objetivo guloso: letras menos frequentes devem aparecer mais abaixo na árvore

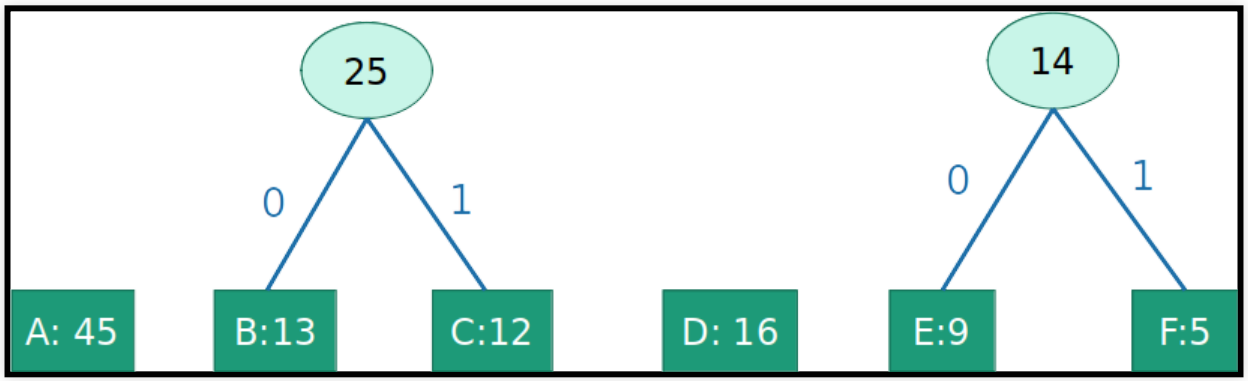
Codificação de Huffman

- Gulosamente construir sub-árvores de baixo para cima



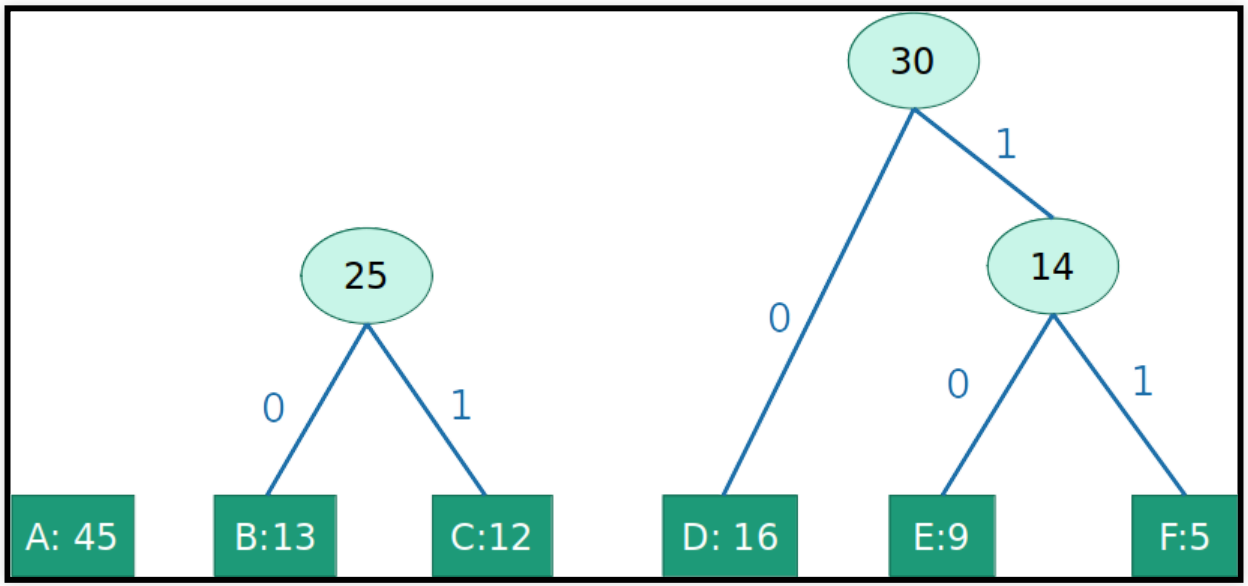
Codificação de Huffman

- Gulosamente construir sub-árvores de baixo para cima



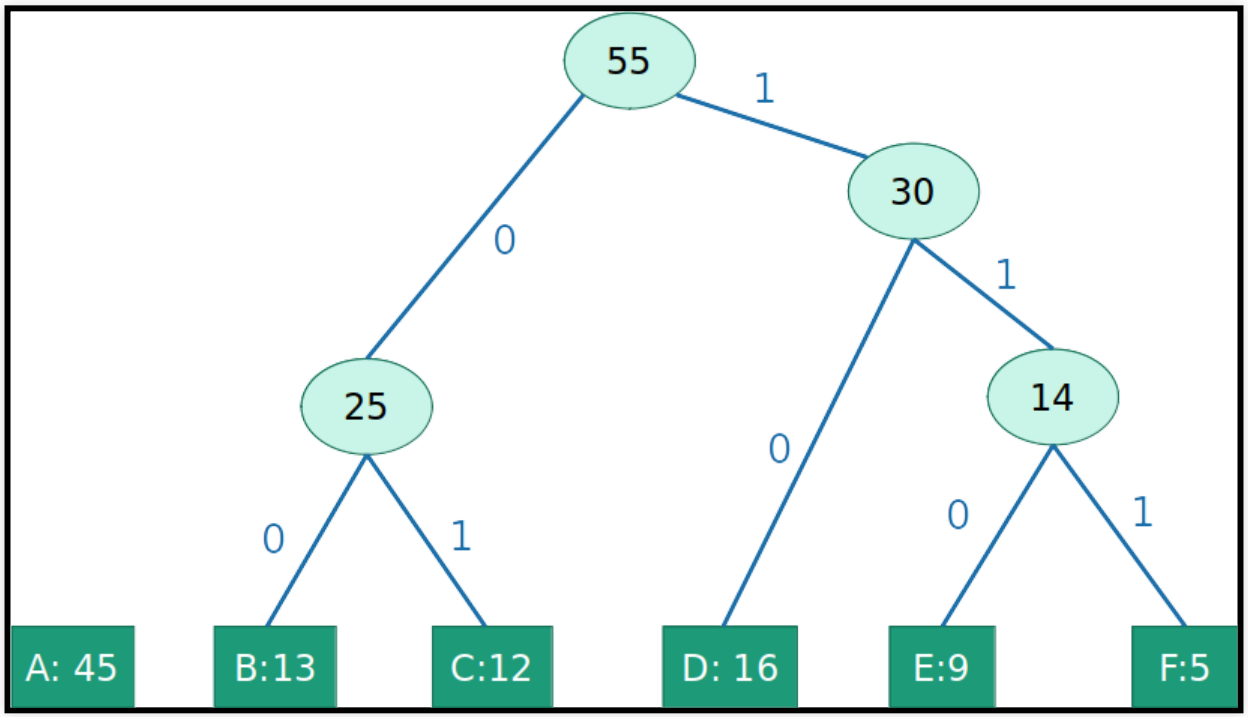
Codificação de Huffman

- Gulosamente construir sub-árvores de baixo para cima



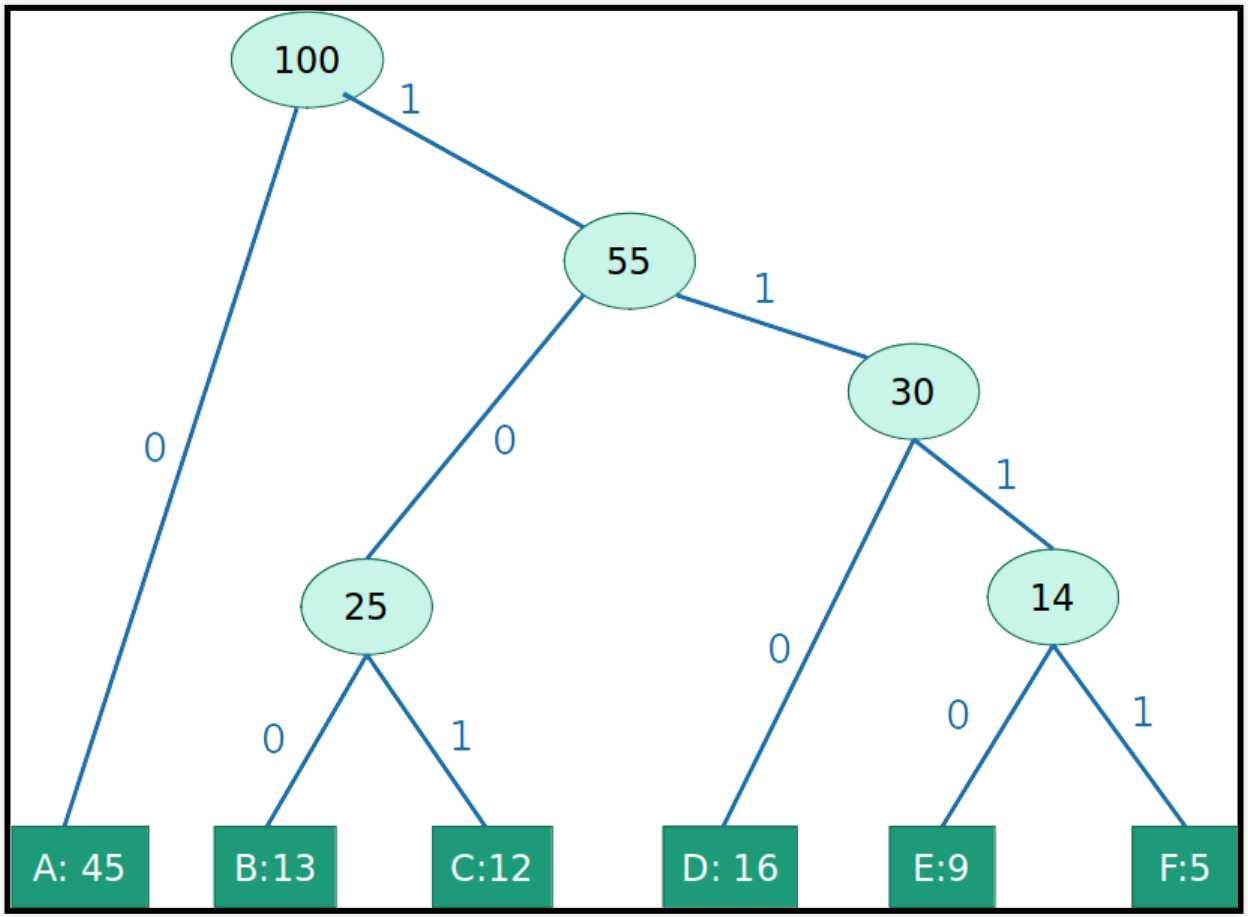
Codificação de Huffman

- Gulosamente construir sub-árvores de baixo para cima



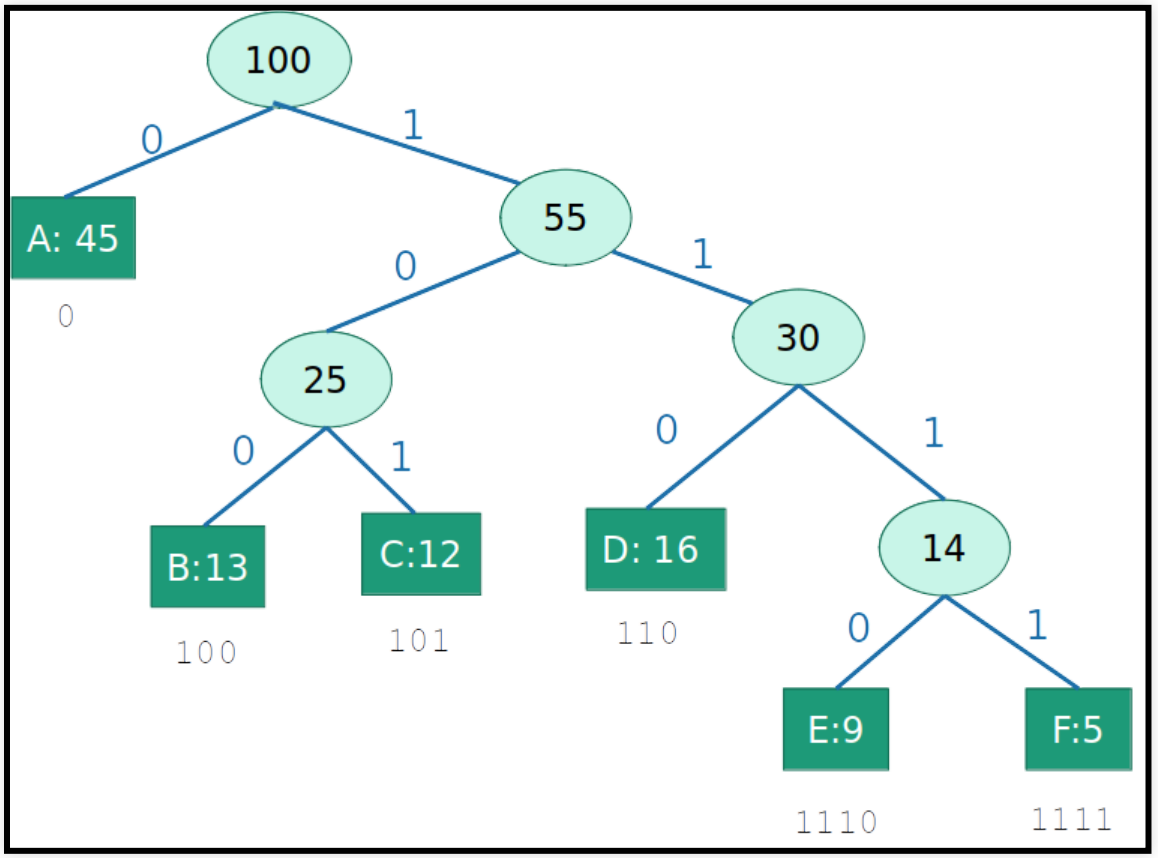
Codificação de Huffman

- Gulosamente construir sub-árvores de baixo para cima


100
1
55
1
30
0
0
1
25
14
0
0
1
0
1
A: 45
B:13
C:12
D: 16
E:9
F:5

Codificação de Huffman

- Gulosamente construir sub-árvores de baixo para cima



$$Custo = (0,45) + 3(0,13 + 0,12 + 0,16) + 4(0,09 + 0,05) = 2,24$$

Codificação de Huffman

Algoritmo 42: HUFFMAN(A, f)

```
1 Sejam a e b os elementos de menor frequência em A
2 se |A| == 2 então
3     retorna árvore com um nó pai não rotulado e a e b como nós filhos
4 Seja A' = (A \ {a, b}) ∪ {ab}
5 Defina f_ab = f_a + f_b
6 T' = HUFFMAN(A', f)
7 Construa T a partir de T' separando a folha rotulada por ab em folhas a e b
    irmãs
8 retorna T
```

demo

Complexidade

- Existe $\Theta(n)$ chamadas recursivas, pois essa é a quatidade de uniões que fazemos.
- Cada chamada pode levar $\Theta(n)$ para encontrar os elementos de menor frequência.
- Portanto, em uma implementação direta, o Algoritmos é $\Theta(n^2)$

Complexidade

- Entretanto, podemos usar uma heap para encontrar os elementos de menor frequência
- Dessa maneira, podemos encontrar os elementos de menor frequência em $2O(\log n) = O(\log n)$.
- A inserção da árvore unida na heap também pode ser feita em $O(\log n)$.
- Portanto, a complexidade usando heap é $O(n \log n)$

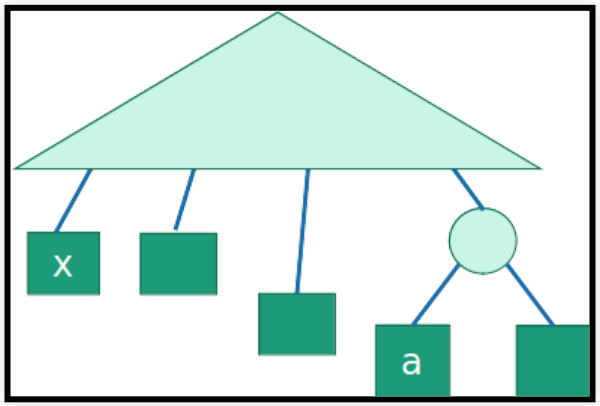
Funciona ?

- A cada passo, não excluímos uma solução ótima

Lema 1: Suponha que x e y são as duas letras menos frequentes. Então existe uma árvore em que x e y são irmãos.

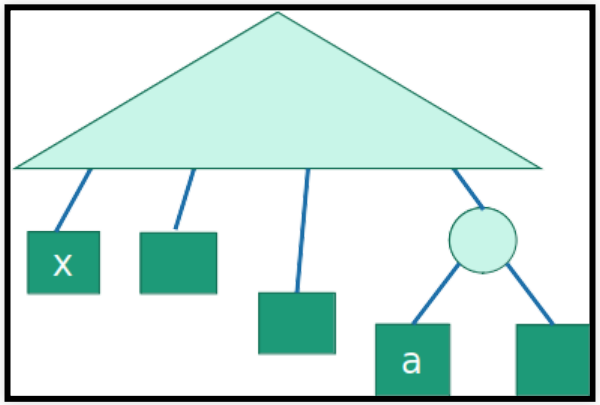
Esboço de prova

- Suponha que temos uma árvore ótima T, e um caracter 'a' tem uma frequência $f_a \geq f_x$ de 'x', mas $d_T(a)$ 'a' tem uma distância até a raiz maior que $d_T(x)$ de 'x'



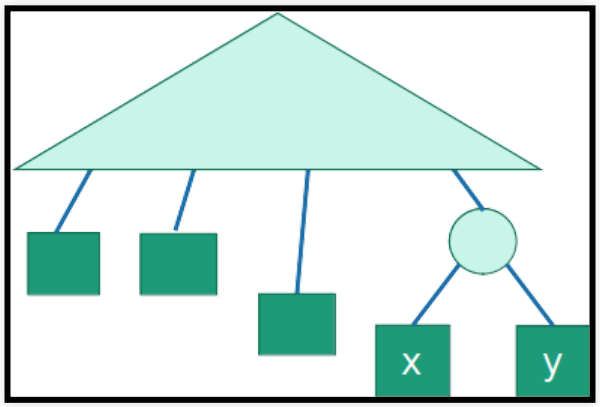
Esboço de prova

- Trocar 'a' por 'x' não pode aumentar o custo
  - 'a' é mais frequente que 'x', e fizemos a sua codificação menor com a troca



Esboço de prova

- Repita o processo para 'y' até que tenhamos 'x' e 'y' como irmãos



- Como 'x' e 'y' são as menos frequentes, o custo nunca aumentou. Então a árvore ainda é ótima

Esboço de prova

- O algoritmo funciona antes da primeira "junção". E após a junção, ainda funciona?

> *Lema 2: Uma árvore codificadora é ótima se e somente se a árvore codificadora da "combinação" de caracteres é ótima*

- Em outras palavras, podemos considerar a "árvore atual" como contendo apenas folhas

Esboço de prova

Esboço de prova

- Seja C um conjunto de caracteres, e T uma árvore que codifica C
- Seja C' uma árvore em que que colapsa uma subárvore de C em um único caracter c', com frequência $f_{c'}$, e T' uma árvore que codifica C'
- Seja $C'' = \{c''_1, c''_2, \cdots, c''_n\}$ os caracteres da subárvore colapsados em c', então $f_{c'} = \sum_i^n c''_i$

Esboço de prova

$$
\begin{aligned}
C(T) - C\left(T'\right) &= \sum_{c \in C} f(c) \cdot d_T(c) - \sum_{c \in C'} f(c) \cdot d_{T'}(c) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} f\left(c_i''\right) d_T\left(c_i''\right) \right) - f\left(c'\right) d_{T'}\left(c'\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} f\left(c_i''\right) \left(d_{T''}\left(c_i''\right) + d_{T'}\left(c'\right)\right) \right) - f\left(c'\right) d_{T'}\left(c'\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} f\left(c_i''\right) d_{T''}\left(c_i''\right) + d_{T'}\left(c'\right) \sum_{i=1}^{r} f\left(c_i''\right) - f\left(c'\right) d_{T'}\left(c'\right) \\
&= \sum_{i=1}^{t} f\left(c_i''\right) d_{T''}\left(c_i''\right)
\end{aligned}
$$

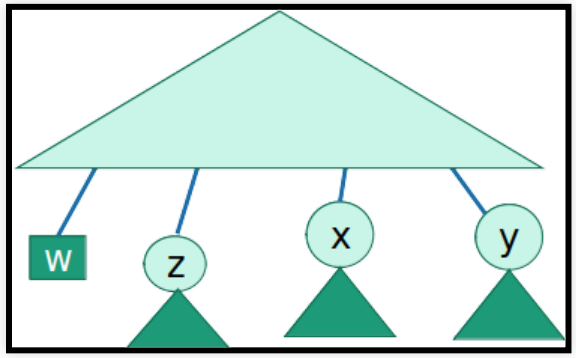
- A direfença de custo só depende de c_i'', então T é ótima se e somente se T' é ótima

Em resumo:

- **Lema 1** Suponha que 'x' e 'y' são os caracteres menos frequentes. Então tem uma árvore ótima em que 'x' e 'y' são irmãos.
- **Lema 2** Podemos assumir que a árvore atual contém apenas folhas
- **Então** a cada passo não removemos nenhuma solução ótima

Passo de indução:

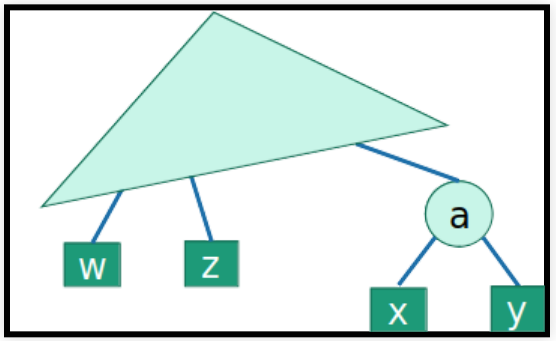
- Suponha que após o passo $t-1$ temos uma coleção de sub-árvores que podem ser interpretadas como "folhas" (de acordo com o Lema 2), e que fazem parte da árvore ótima



- Queremos mostrar que após o passo t contendo todas as subárvores como "folhas" que fazem parte da árvore ótima

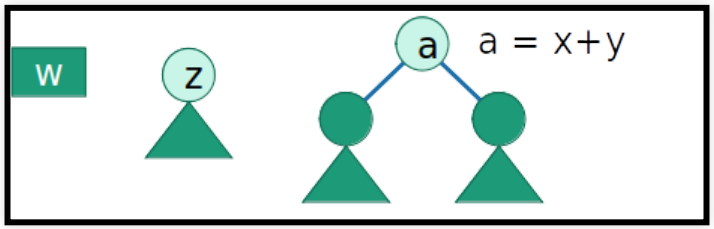
Passo de indução:

- Digamos que 'x' e 'y' são as duas menores (menos frequentes)
- De acordo com o Lema 1, existe uma sub-árvore ótima em que 'x' e 'y' são irmãos



Passo de indução:

- E no passo t, o algoritmo une as subárvores com raíz em 'x' e 'y', criando uma nova subárvore:



- De acordo com o Lema 2, o novo nó 'a' pode ser interpretado como uma folha, com frequência $f_a = f_x + f_y$. Portanto, após o passo t, continuamos com as subárvores que fazem parte da árvore ótima.

Resumindo:

- O código ASCII não é uma maneira ótima de codificar textos em línguas baseadas em alfabetos em que a distribuição das letras não é uniforme.
- A codificação de Huffman é uma maneira ótima!
- Podemos usar um algoritmo guloso para calcular a codificação de Huffman para qualquer língua.