# Análise de Algoritmos

Ronaldo Cristiano Prati

Bloco A, sala 513-2

ronaldo.prati@ufabc.edu.br

# Caminho mais Curto

- Já vimos que a busca em largura é capaz de encontrar a menor distância de um certo nó para qualquer outro nó para grafos não ponderados
  - Como cara arestas não tem pesos (ou equivalentemente tem o mesmo peso), a distância entre vértices é dada pelo número de areastas
- E se areastes tiverem peso?
  - O tamanho de um caminho é dado pela soma dos pesos das arestas daquele caminho

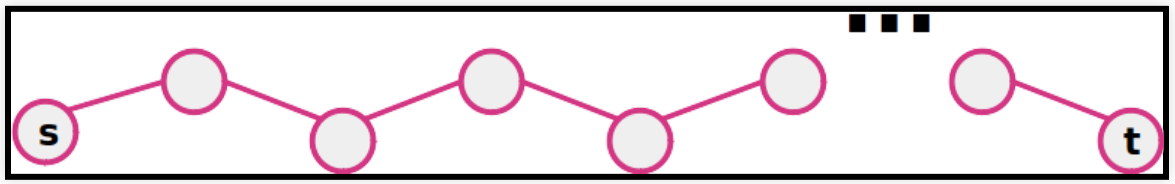
# Caminho mais Curto de única fonte

- **Problema** Dados um grafo $G = (V, E)$, uma função $w$ de peso nas arestas e um vértice $s \in V(G)$, calcular a distância mínima $dist^w_G(s, v)$ para todo $v \in V(G)$.
- Em outras palavras, queremos encontrar a distância mínima a partir de uma fonte $s$ qualquer do grafo para todos os outros nós do grafo
  - Se o nó $v$ não é alcançável a partir de $s$, $dist^w_G(s, v) = \infty$

# Caminho mais Curto

***Afirmação:*** *Um subcaminho de um caminho mais curto também é um caminho mais curto*

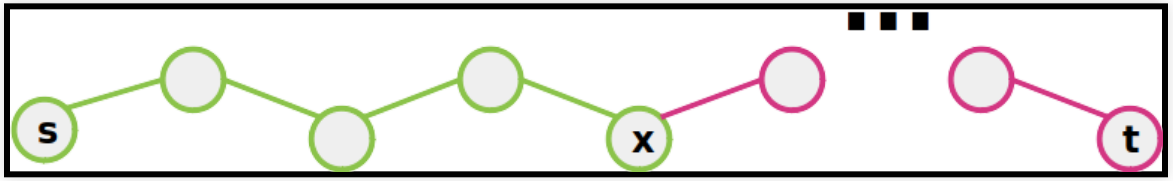
- Intuição:
  - Suponha que esse seja o caminho mais curto de $s$ a $t$



# Caminho mais Curto

***Afirmação:*** *Um subcaminho de um caminho mais curto também é um caminho mais curto*

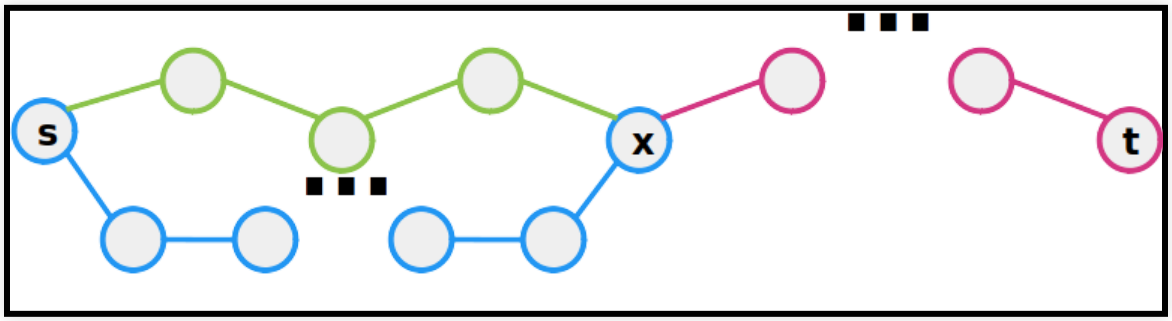
- Intuição:
  - Suponha que esse seja o caminho mais curto de $s$ a $t$
  - E que nesse caminho exista um subcaminho de $s$ e passando por $x$



# Caminho mais Curto

***Afirmação:*** *Um subcaminho de um caminho mais curto também é um caminho mais curto*

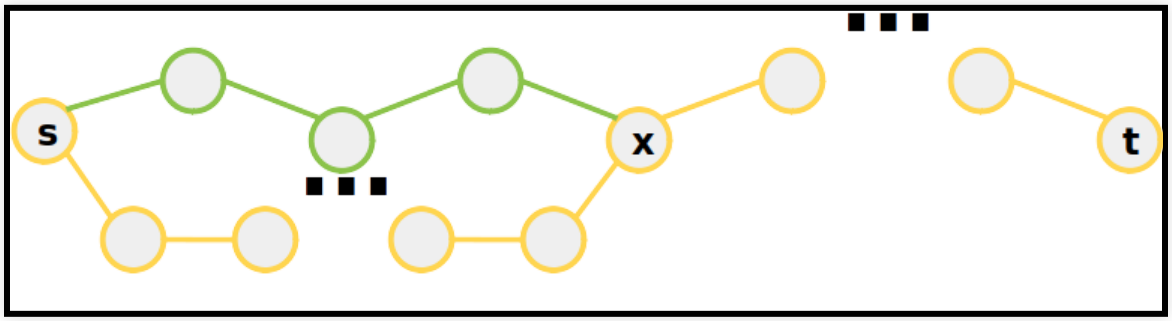
- Intuição:
  - Suponha que esse seja o caminho mais curto de $s$ a $t$
  - E que nesse caminho exista um subcaminho de $s$ e passando por $x$
  - Se existir um outro caminho de $s$ a $x$ ele tem que ser maior ou igual que o subcaminho do caminho ótimo


s
x
t

# Caminho mais Curto

***Afirmação:*** *Um subcaminho de um caminho mais curto também é um caminho mais curto*

- Intuição:
  - Suponha que esse seja o caminho mais curto de $s$ a $t$
  - E que nesse caminho exista um subcaminho de $s$ e passando por $x$
  - Se existir um outro caminho de $s$ a $x$ ele tem que ser maior ou igual que o subcaminho do caminho ótimo (senão ele seria o ótimo)


s
x
t

# Algorithmo de Dijkstra

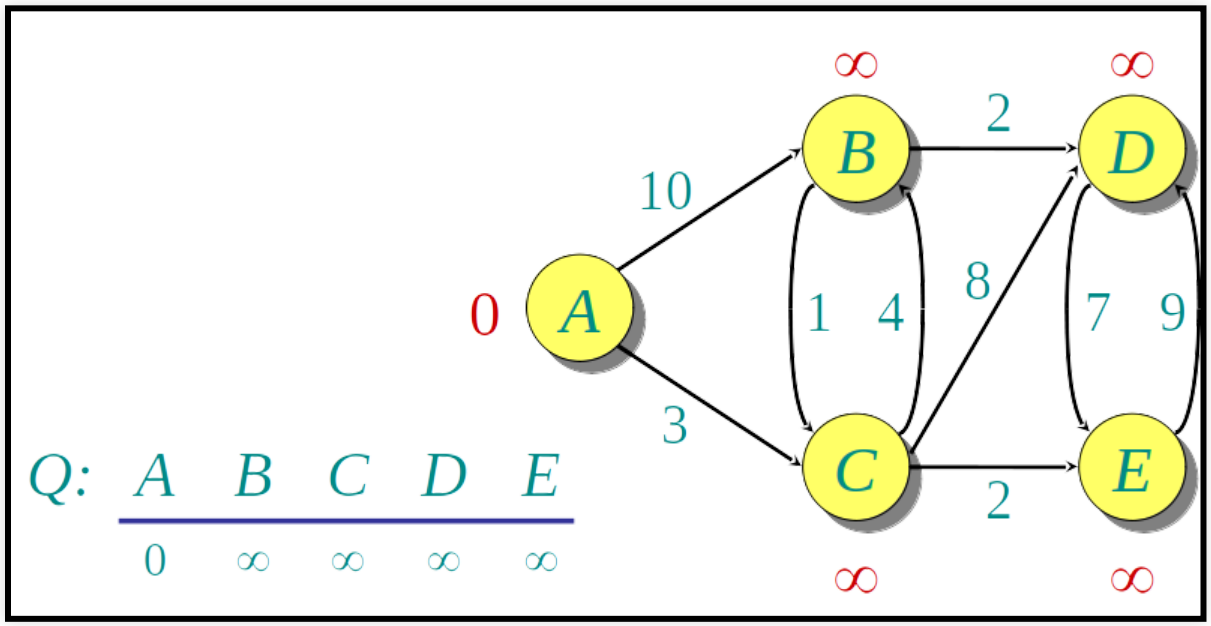
- O algoritmo de **Dijkstra** resolve o problema, e os pesos das areastas forem todos positivos
- A distância $v.distance$ para os nós $v \in G$ é inicializada com $\infty$ e para a fonte é inicializada 0
- Algoritmo guloso: a cada etapa descobre a menor distância para um novo vértice $u$, e "relaxa" a distância para os demais
  - Seleciona o vértice $u$ de menor distância
  - Relaxa a distância dos vizinhos $v$ de $u$ usando a fórmula:

$$v.distancia = \min(v.distancia, u.distância + w(uv))$$

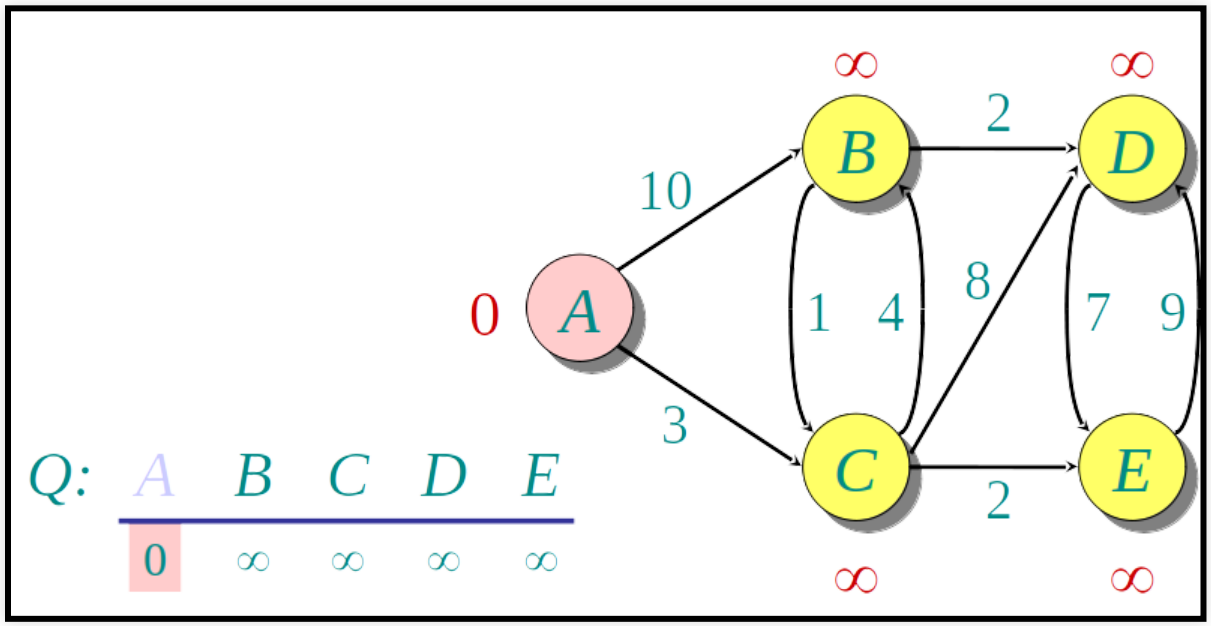
# Algorithmo de Dijkstra

- Usamos um apontador para o predecessor de cada nó para armezar o menor caminho, além da menor distância
- Podemos usar uma Heap para encontrar o vértice de menor distância mais rapidamente.
- A Heap armazena os nós, de acordo com a distância conhecida até o momento.

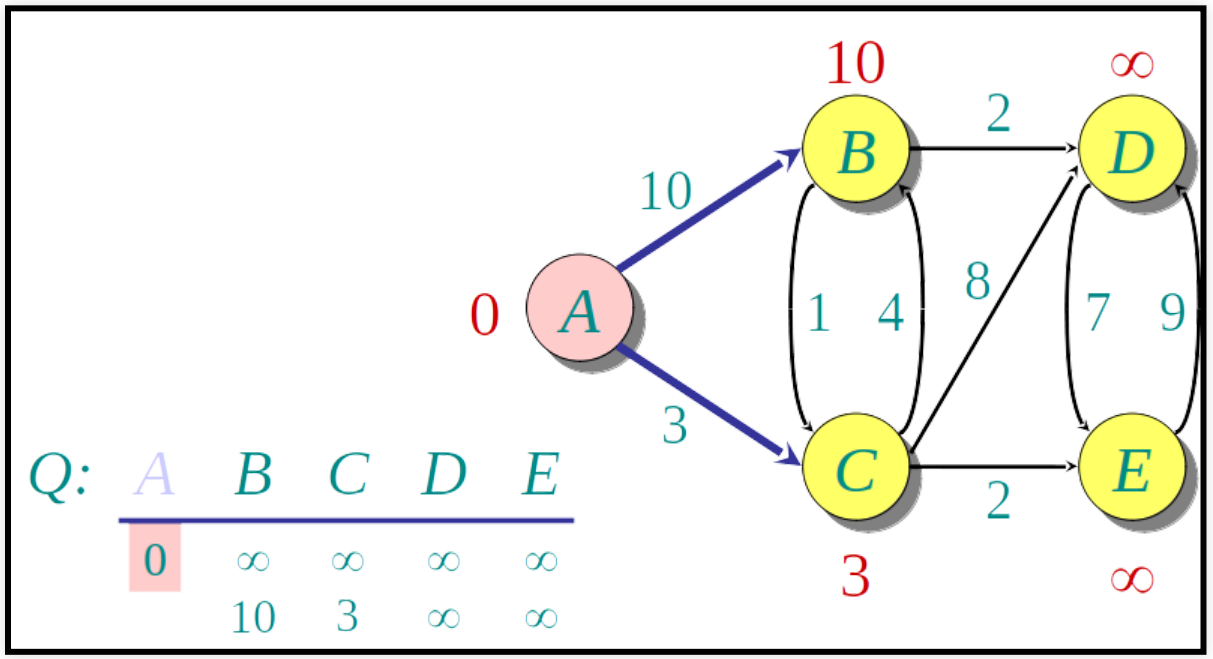
# Algorithmo de Dijkstra



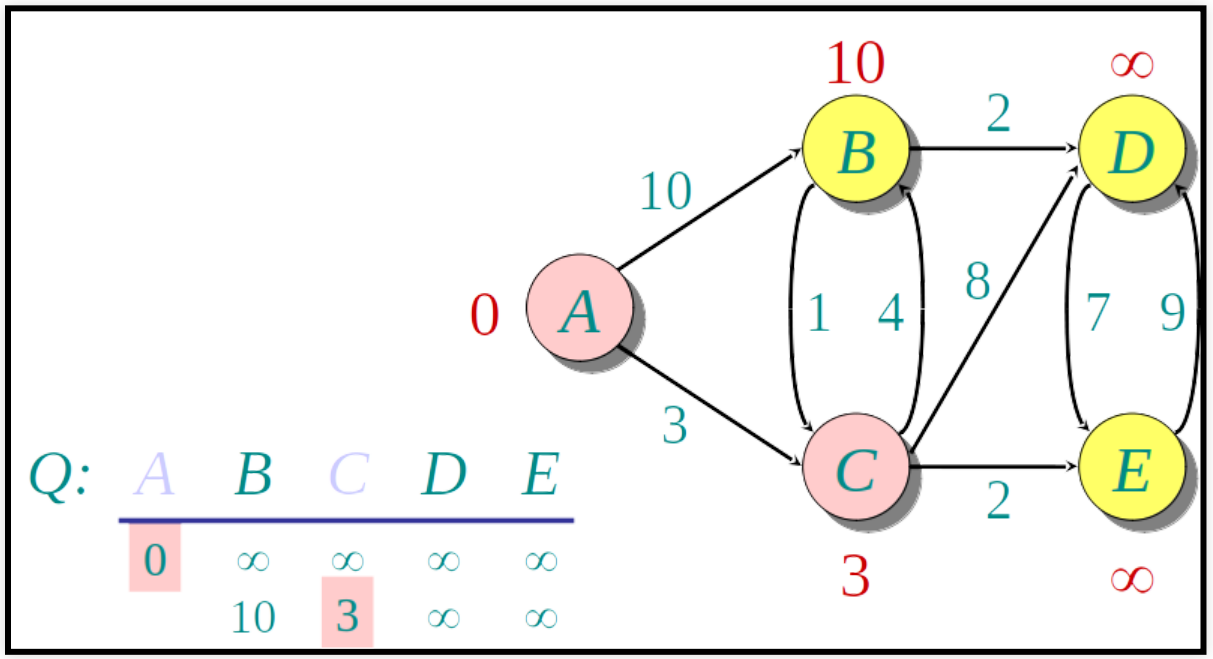
# Algorithmo de Dijkstra



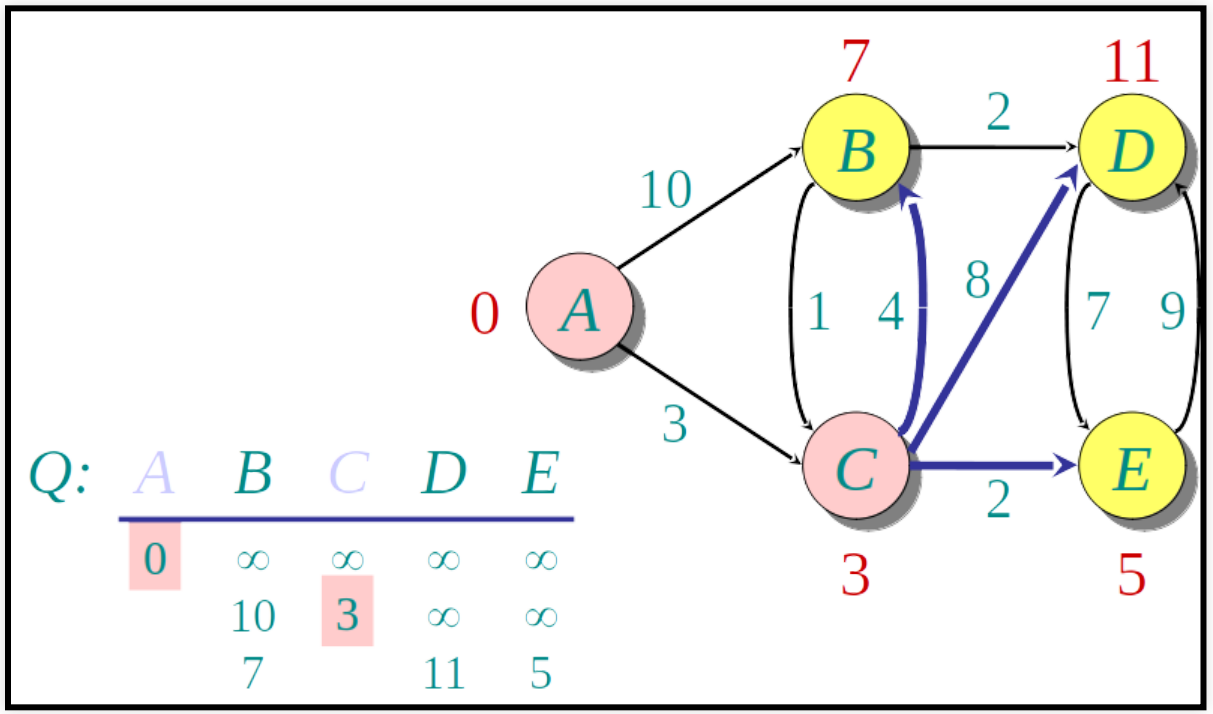
# Algorithmo de Dijkstra



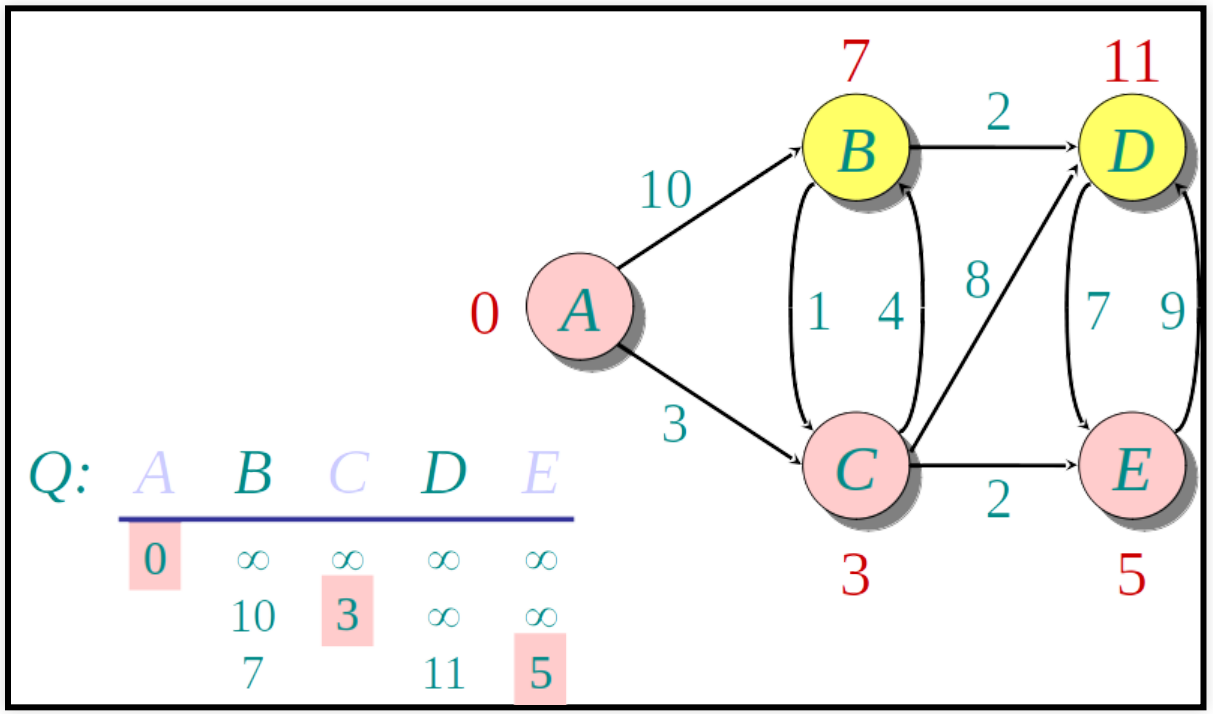
# Algorithmo de Dijkstra



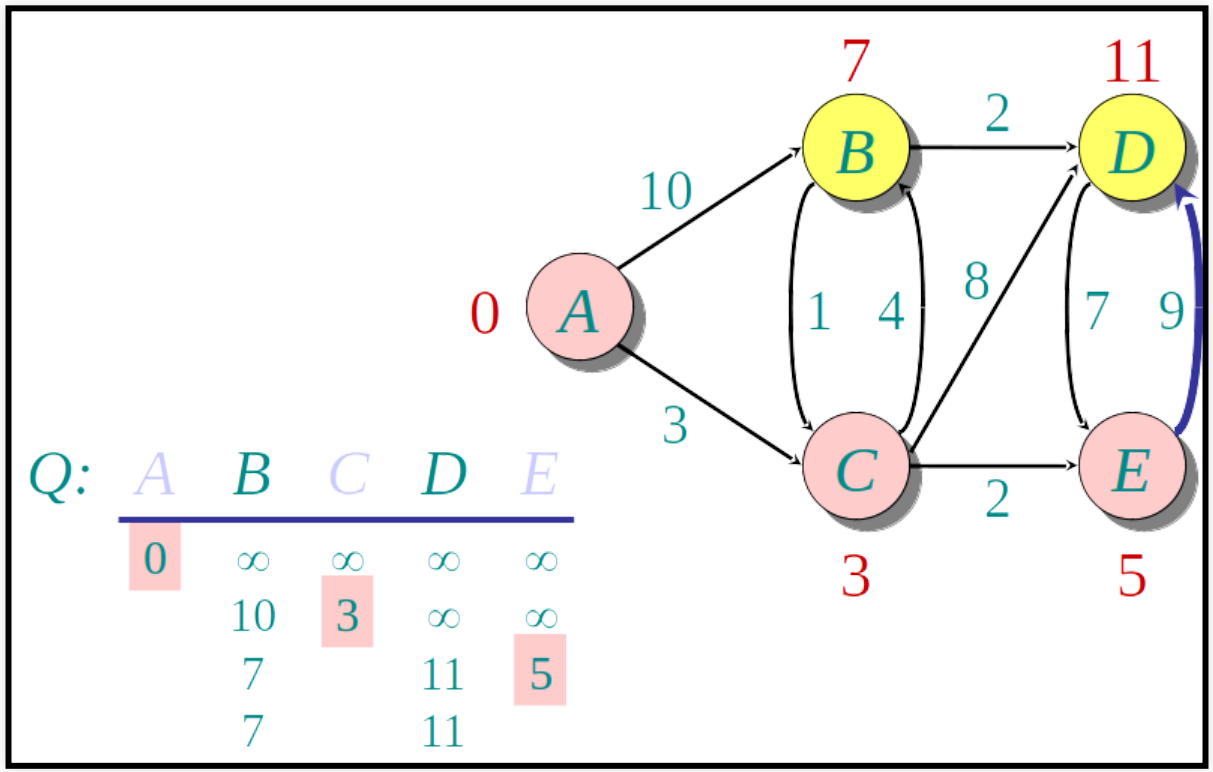
# Algorithmo de Dijkstra



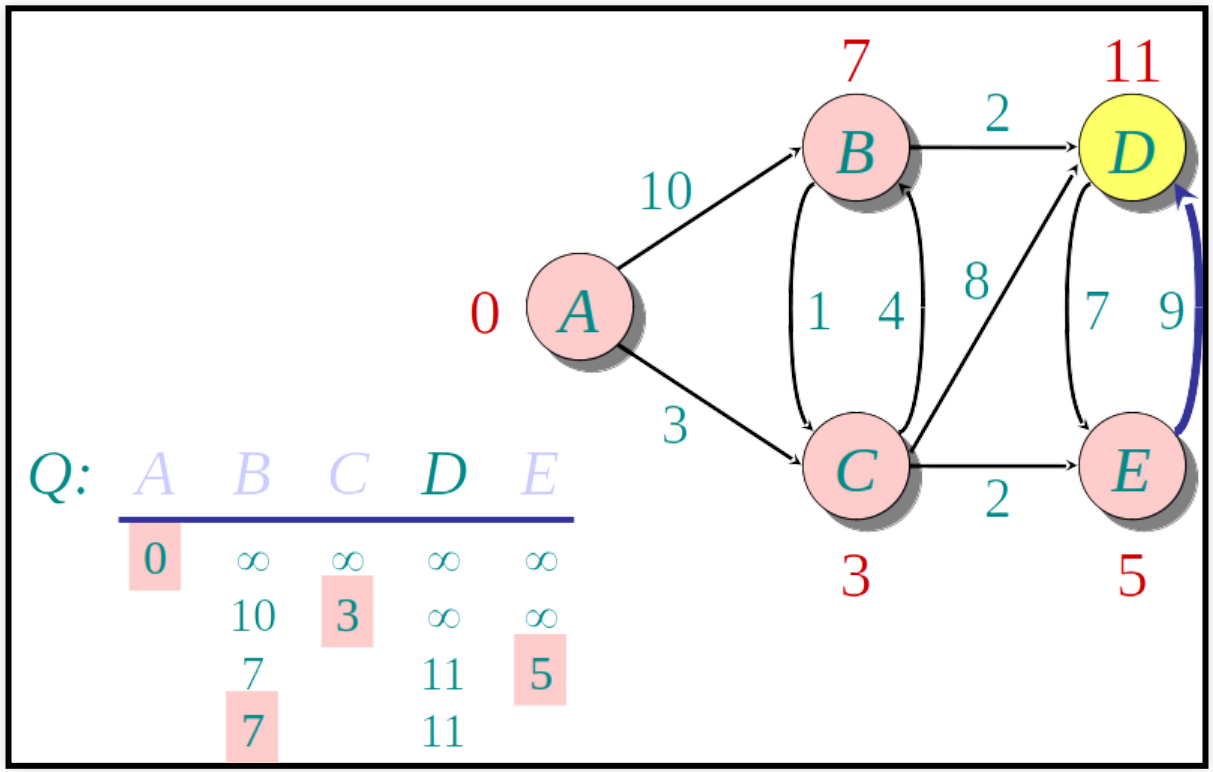
# Algorithmo de Dijkstra



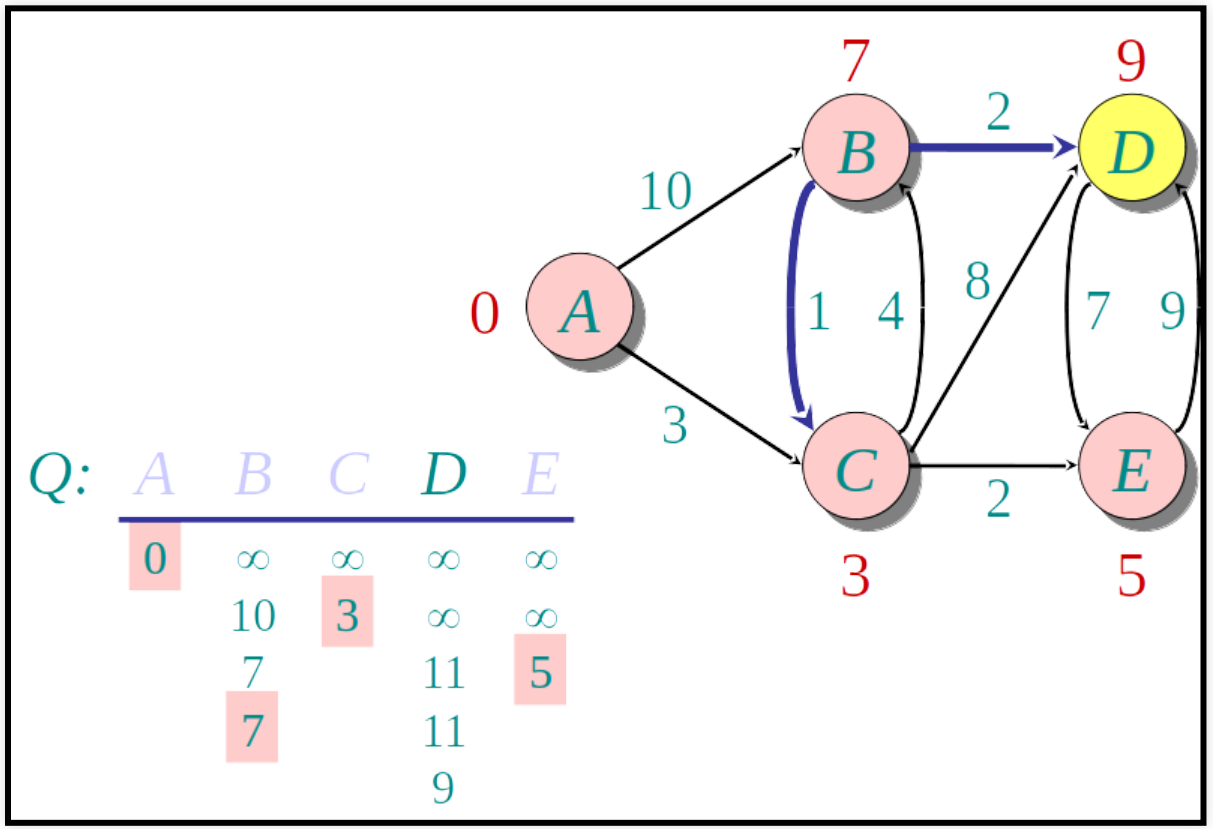
# Algorithmo de Dijkstra



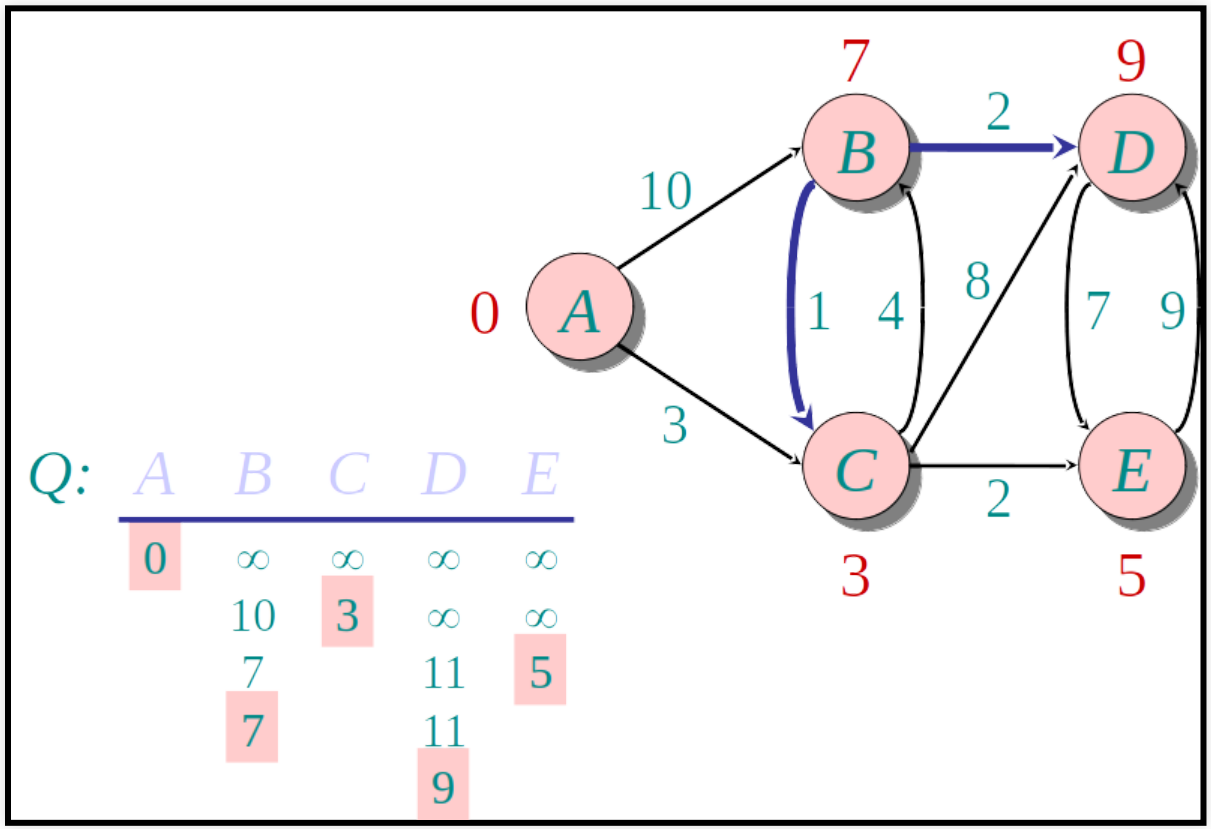
# Algorithmo de Dijkstra



# Algorithmo de Dijkstra



# Algorithmo de Dijkstra



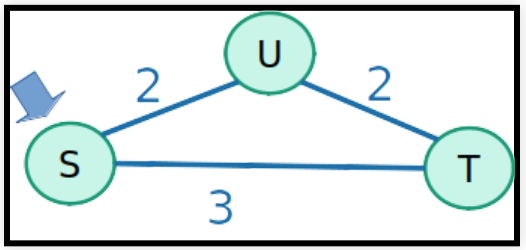
# Algorithmo de Dijkstra

**Algoritmo 71:** DIJKSTRA($G = (V, E)$, $w$, $s$)

```
1  para todo vértice v ∈ V(G) faça
2      v.distancia = ∞
3      v.predecessor = null
4  s.distancia = 0
5  cria fila de prioridades F com conjunto V(G) baseada em v.distancia
6  para i = 1 até |V(G)| faça
7      u = RemoveDaHeap(F)
8      para todo vértice v ∈ N(u) em F faça
9          se v.distancia > u.distancia + w(uv) então
10             v.predecessor = u
11             v.distancia = u.distancia + w(uv)
12             AlteraHeap(F, v.indice, u.distancia + w(uv))
```

# Algorithmo de Dijkstra

- É muito parecido com o algoritmo de Prim
  - Prim: Encontra uma árvore geradora mínima conectando todos os nós do grafo
  - Dijkstra: Encontra uma árvore de menor distância entre um certo nó $i$ para todos os outros nós do grafo
- Complexidade de ambos é similar



# Algorithmo de Dijkstra

- Usado na prática
  - O protocolo OSPF (Open Shortest Path First), um protocolo de rotamento para redes IP, usa dijkstra

# Algorithmo de Dijkstra

- No entanto, o algoritmo tem algumas limitações:
  - Os pesos não podem ser negativos
  - Se os pesos mudam, o algoritmo precisa ser executado novamente
    - No OSPF, um vértice faz broadcast de qualquer mudança para a rede, e então cada vértice executa Dijkstra novamente do zero.

# Por que funciona?

- Seja $s$ o nó fonte
- Teorema: Após a execução do algoritmo de Dijkstra, $v.distancia$ é o valor correto de $dist_G^w(s, v)$
- Observe que:
  - Para tovo $v \in V(G)$, $v.distancia \geq dist_G^w(s, v)$. Ou seja, nunca subestimamos $dist_G^w(s, v)$
    - Sempre pegamos o mínimo entre o valor atual e um outro caminho com mais uma aresta
  - Quando um vértice é "finalizado", $v.distancia = dist_G^w(s, v)$
    - Por contradição, podemos provar que caso contrário, teríamos chegado a $v$ por um caminho de menor distância

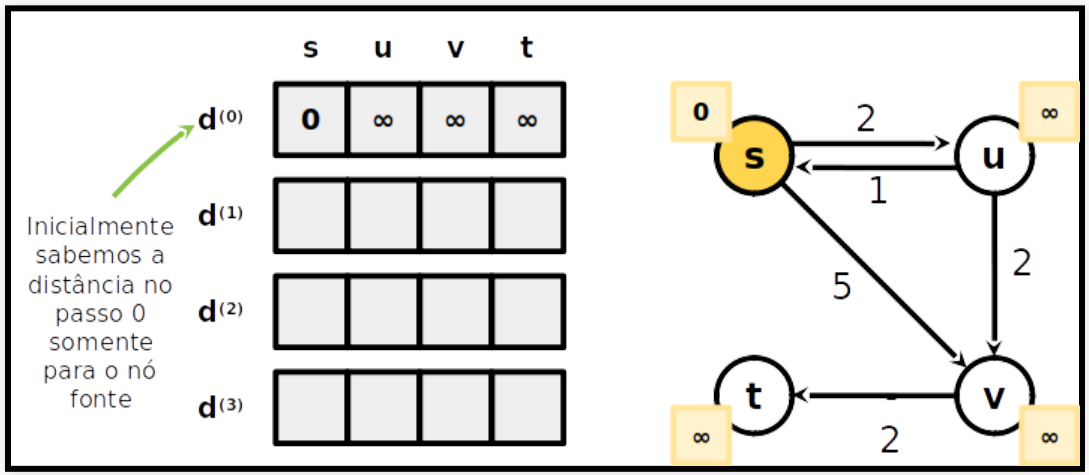
# Algorithmo Bellman-Ford

- Mais lento que Dijkstra
- Entretanto, pode trabalhar com pesos negativos
- É útil como subrotina de outros algoritmos
- Também tem alguma flexibilidade com relação a mudança de pesos

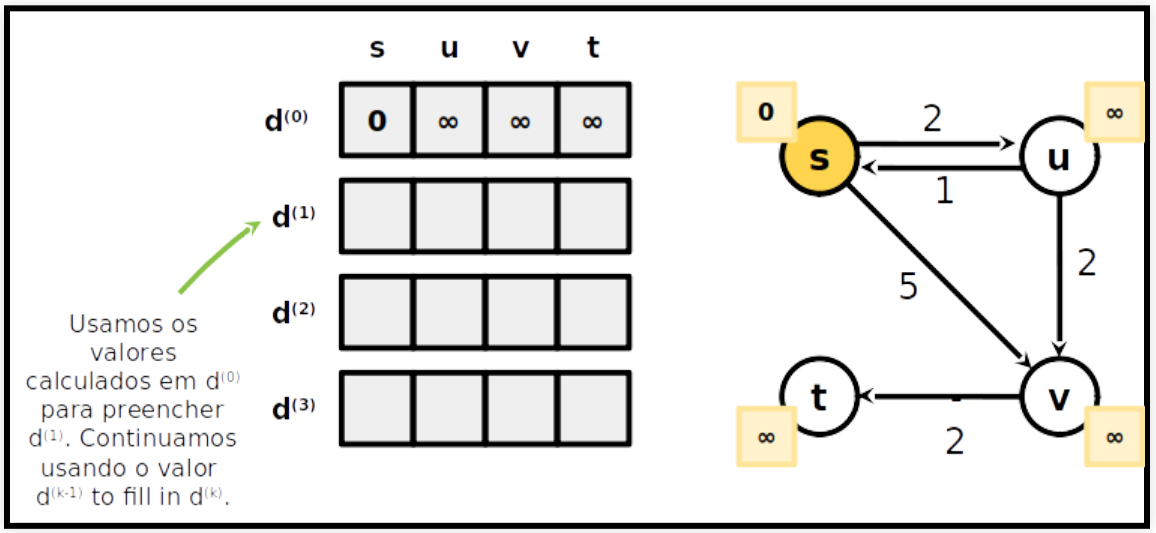
# Algorithmo Bellman-Ford

- Ideia básica:
  - Ao invés de (gulosamente) atulizar apenas o vértice $u$ de menor distância, atualizamos todos os vértices simultaneamente
- Para melhorar o desempenho, podemos usar programação dinâmica!

# Algorithmo Bellman-Ford



# Algorithmo Bellman-Ford



# Algorithmo Bellman-Ford

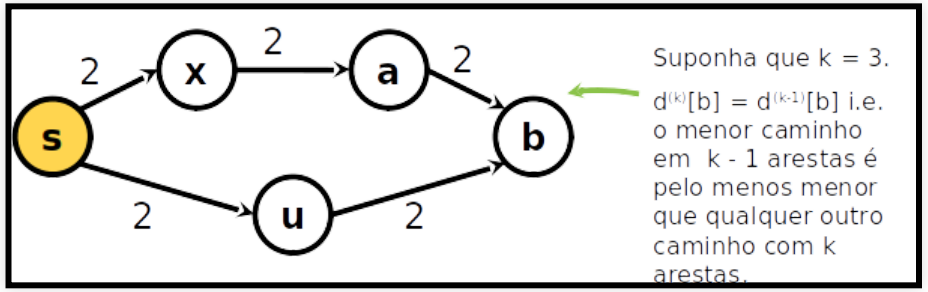
- Como podemos utilizar as distância $d^{(k-1)}$ calculadas na iteração $k-1$ para calcular a distância $d^{(k)}$ da iteração $k$?
  - No passo $k$, $d^{(k)}$ armazenada a menor distância em no máximo $k$ arestas a partir da fonte
  - Temos dois casos (próximos slides):

$$d^{(k)}[b] = \min\{\underbrace{d^{(k-1)}[b]}_{\text{caso 1}}, \underbrace{\min_{a}\{d^{(k-1)}[a] + w(a,b)\}}_{\text{caso 2}}\}$$

# Algorithmo Bellman-Ford

- **Caso 1:** o menor caminho de $s$ até um nó $b$ com no máximo $k$ arestas tem $k-1$ arestas, nesse caso

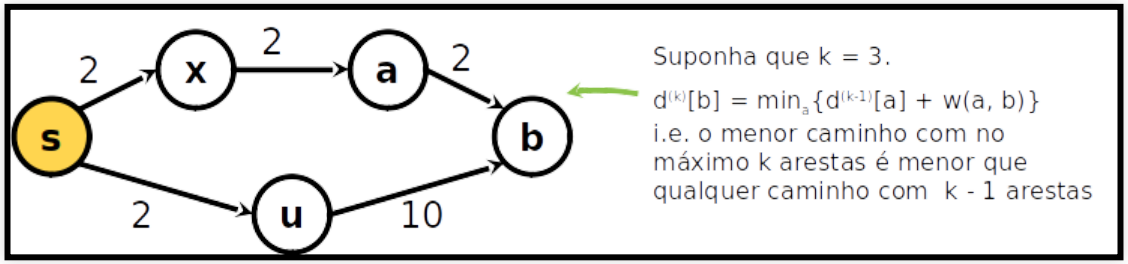
$$d^{(k)}[b] = d^{(k-1)}[b]$$



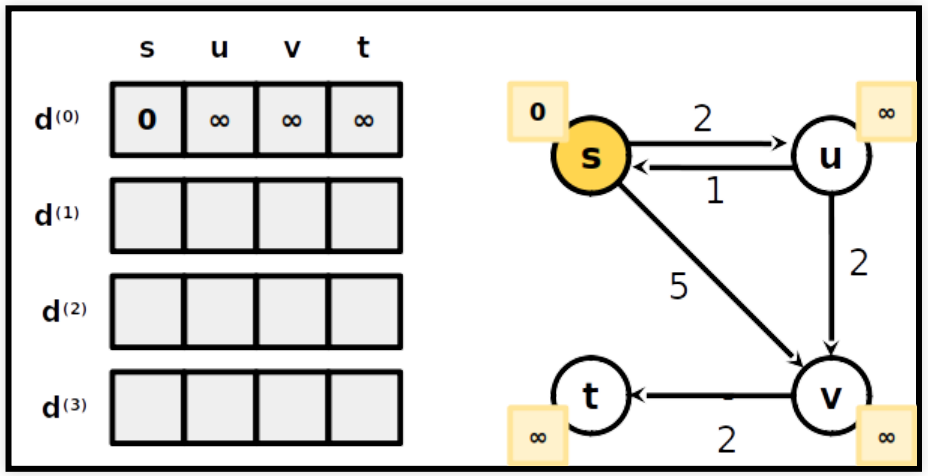
# Algorithmo Bellman-Ford

- **Caso 2:** o menor caminho de $s$ até um nó $b$ tem $k$ arestas

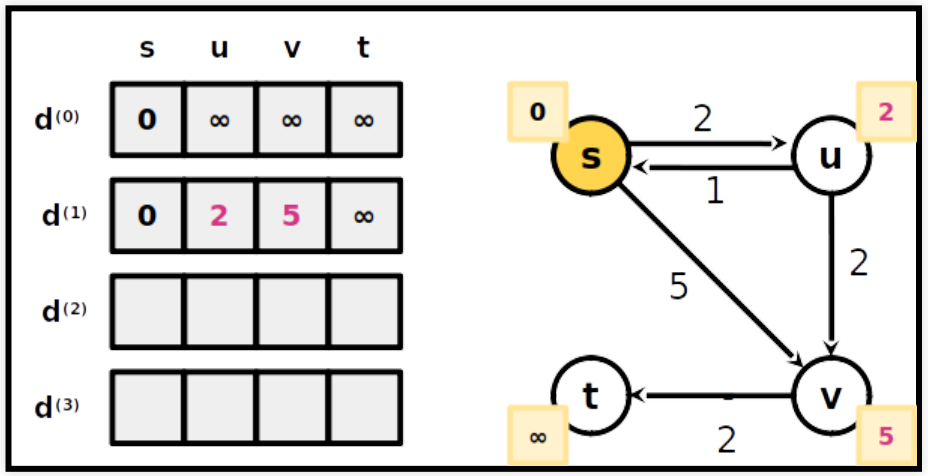
$$d^{(k)}[b] = \min_{a}\{d^{(k-1)}[a] + w(a,b)\}$$



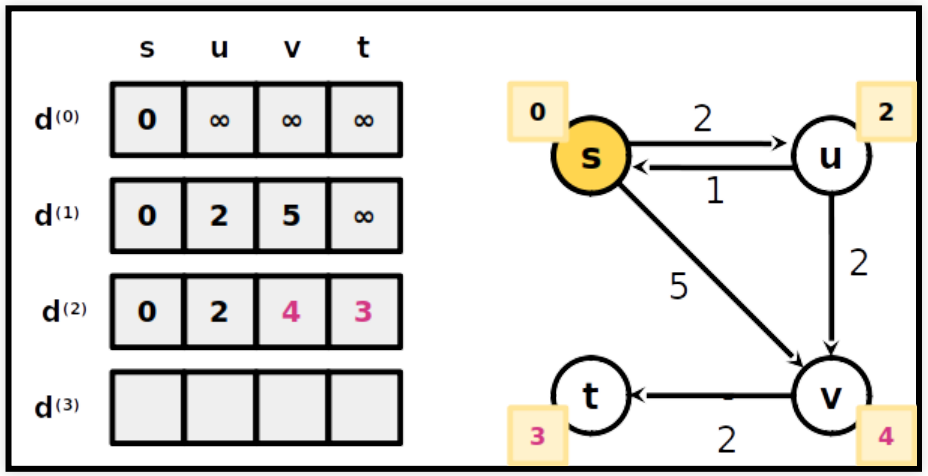
# Algorithmo Bellman-Ford



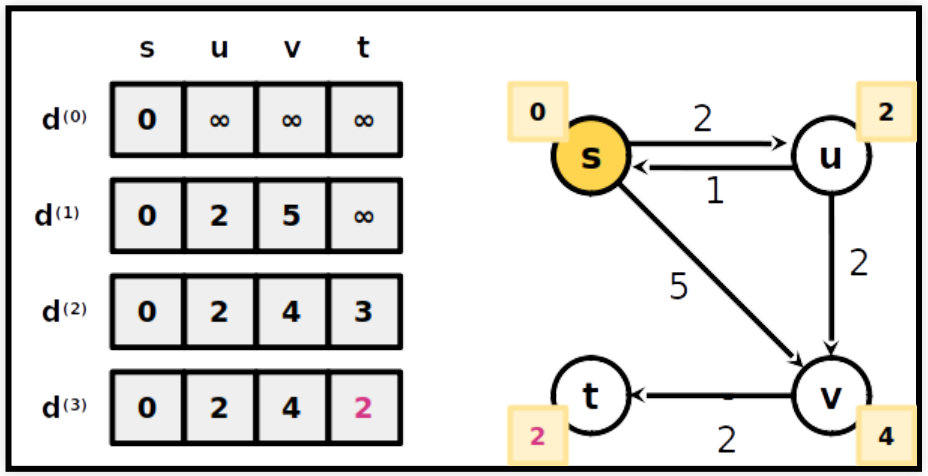
# Algorithmo Bellman-Ford



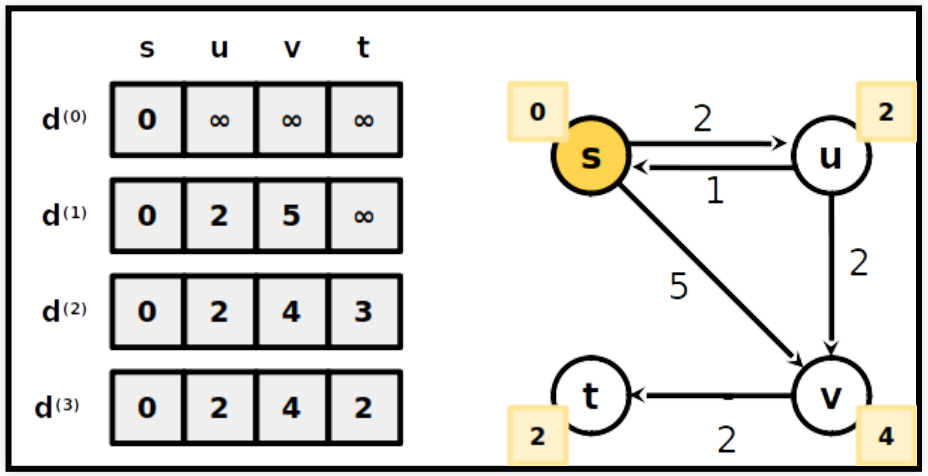
# Algorithmo Bellman-Ford



# Algorithmo Bellman-Ford

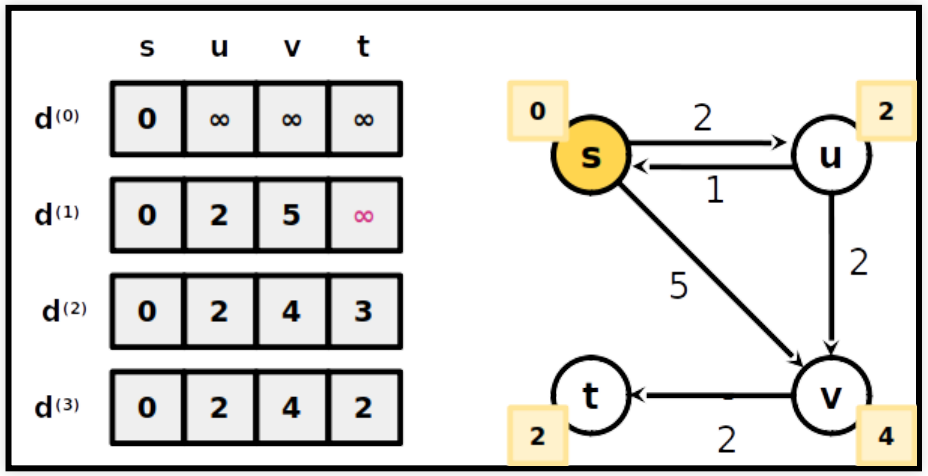


# Algorithmo Bellman-Ford



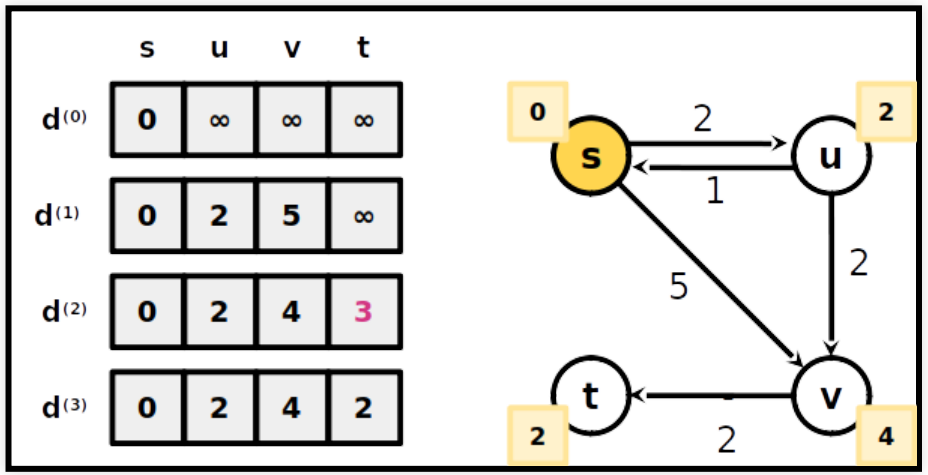
# Algorithmo Bellman-Ford

- A menor distância de $s$ a $t$ com no máximo 1 aresta é $\infty$, portanto não existe um caminho até ele com 1 aresta



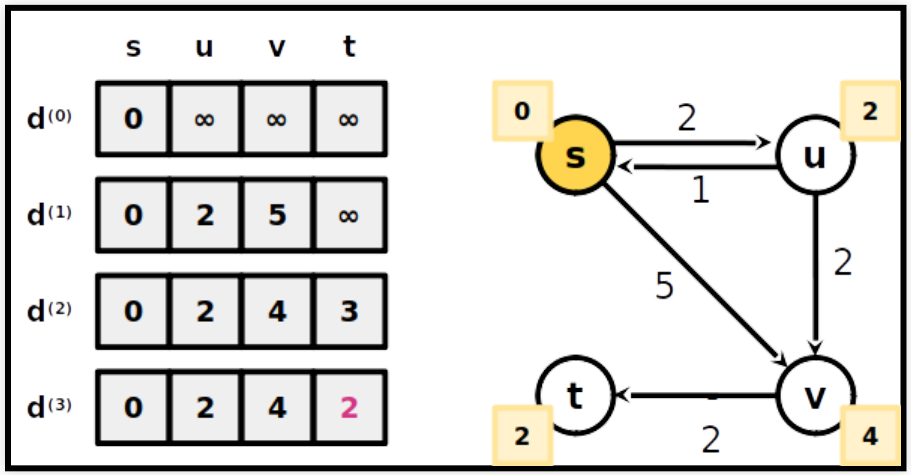
# Algorithmo Bellman-Ford

- A menor distância de $s$ a $t$ com no máximo 1 aresta é $\infty$, portanto não existe um caminho até ele com 1 aresta
- A menor distância de $s$ a $2$ com no máximo 2 arestas é $3$ (s-v-t)



# Algorithmo Bellman-Ford

- A menor distância de $s$ a $t$ com no máximo 1 aresta é $\infty$, portanto não existe um caminho até ele com 1 aresta
- A menor distância de $s$ a $t$ com no máximo 2 arestas é $3$ (s-v-t)
- A menor distância de $s$ a $t$ com no máximo 3 arestas é $3$ (s-u-v-t)

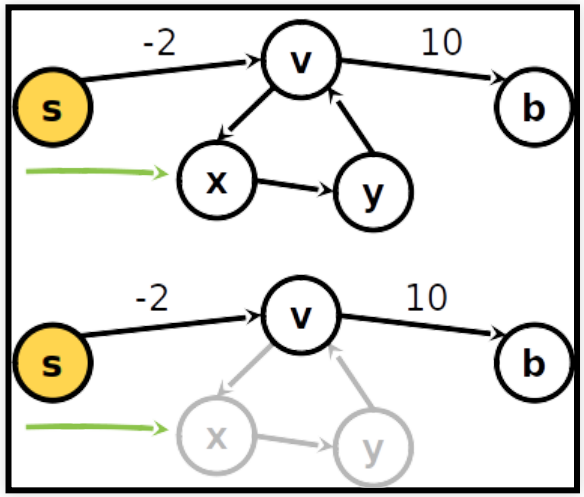

s u v t
d(0) 0 ∞ ∞ ∞
d(1) 0 2 5 ∞
d(2) 0 2 4 3
d(3) 0 2 4 2
0
2
s
u
2
1
5
2
t
v
2
2
4

# Por que funciona?

- Ao final da execução, temo $d^{(|V|-1)}[b]$, que é o custo de $s$ a $v \in V(G)$ contendo até $|V| - 1$ arestas.
- O algortimo estará correto se $d^{(|V|-1)}[b] = dist_G^w(s, v)$
- Afirmação: Desde que não haja um ciclo negativo, $d^{(|V|-1)}[b] = dist_G^w(s, v)$.

# Por que funciona?

- Cao o ciclo seja positivo (ou seja, a soma dos pesos das arestas do ciclo vor maior que zero), percorrer o ciclo aumenta o caminho, então ele não está no caminho mínimo



# Ciclos negativos

- Se houver algum ciclo negativo no grafo, haverá alguma aresta $u, v$ tal que

$$v.distancia > u.distancia + w(u, v)$$

- O que não pode ocorrer se o grafo não tiver um ciclo negativo

# Algorithmo Bellman-Ford

# Complexidade

- Para cada vértice do grafo, o algoritmo itera (no pior caso) sobre todas as arestas
- Então a sua complexidade é $O(|V||E|)$

# Caminho mais Curto entre todos os pares

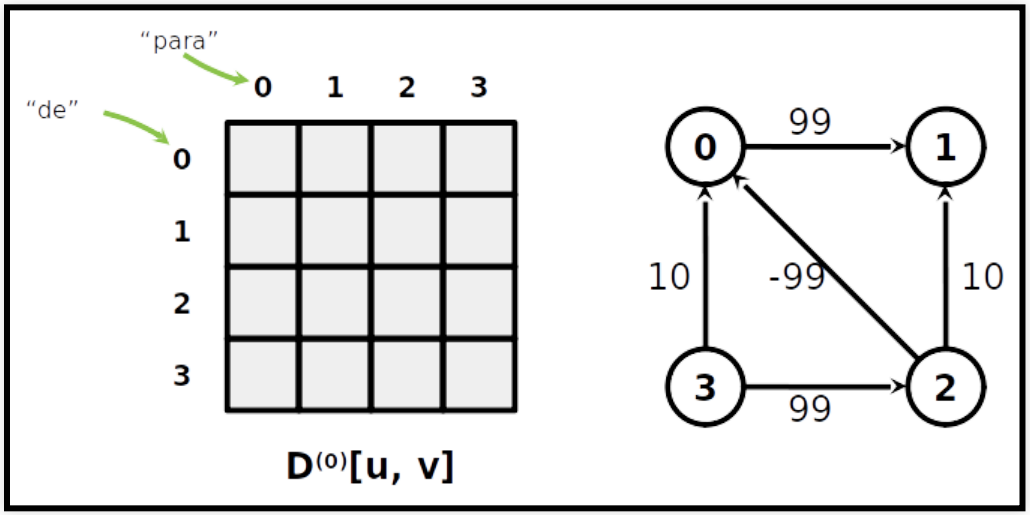
*Dados um grafo $G = (V, E)$ e uma função $w$ de peso nas arestas, calcular $dist_G^w(u, v)$ para todo par $u, v \in V(G)$.*

# Caminho mais Curto entre todos os pares

- Uma solução simples seria executar o algoritmo de Bellman-Ford usando cada um dos vértices como fonte
- Tempo de execução $O(|V|^2|E|)$
- Podemos fazer melhor?

# Algoritmo de Floyd-Warshall

- Vamos manter uma matrix $D^{(k)}$ de tamanho $|V| \times |V|$ para cada $k \in [0..|V|]$



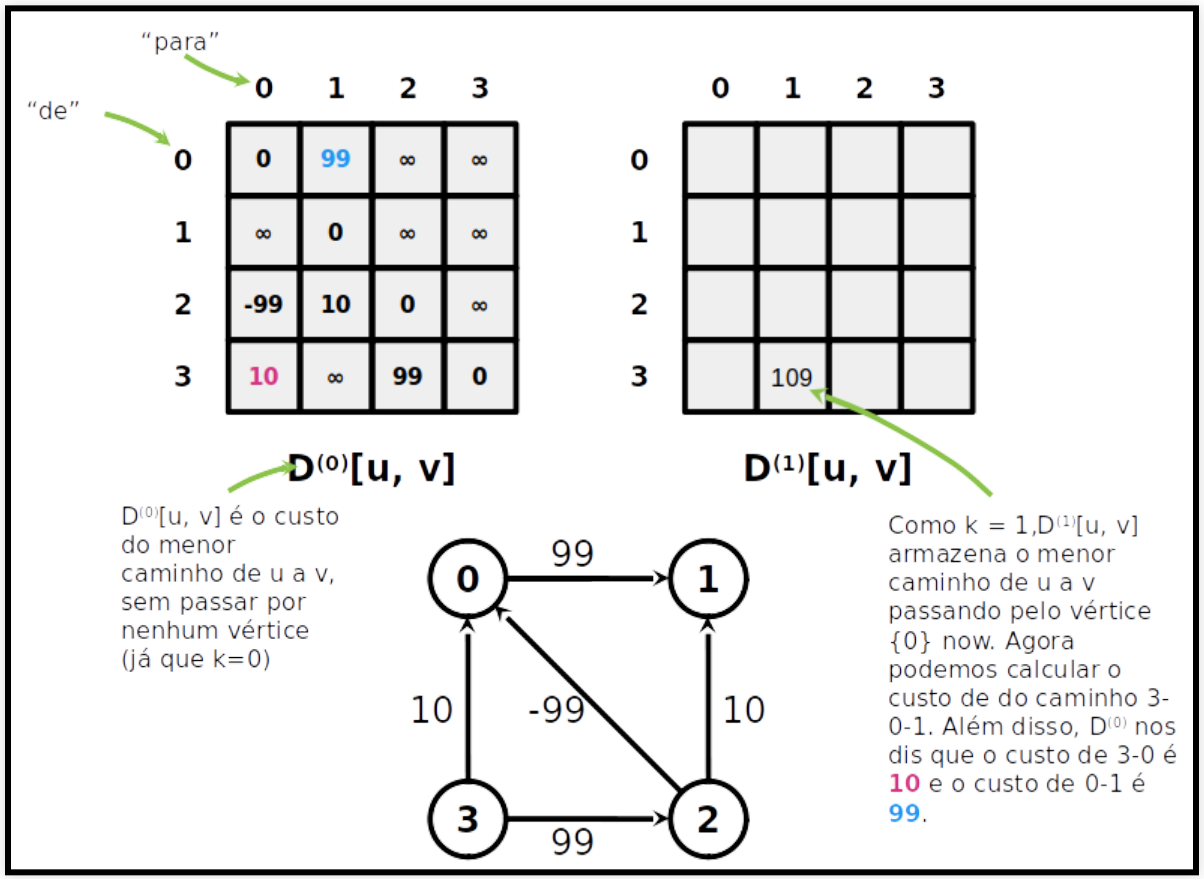
# Algoritmo de Floyd-Warshall

- Vamos manter uma matrix $D^{(k)}$ de tamanho $|V| \times |V|$ para cada $k \in [0..|V|]$
  - $D^{(k)}[u, v]$ é o caminho de $u$ a $v$, tal que os vértices internos no caminho estão no conjunto $\{0, ..., k-1\}$

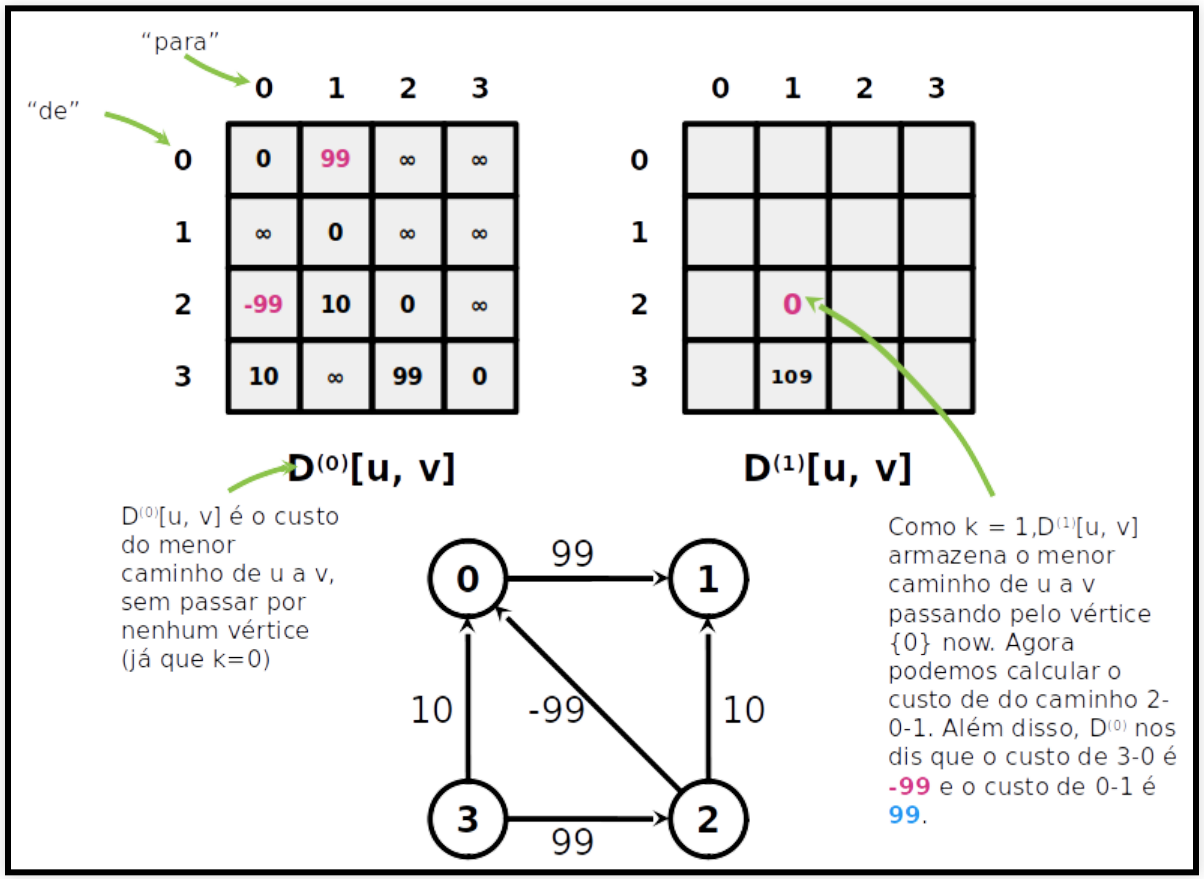
# Algoritmo de Floyd-Warshall

- Vamos manter uma matrix $D^{(k)}$ de tamanho $|V| \times |V|$ para cada $k \in [0..|V|]$
  - $D^{(k)}[u, v]$ é o caminho de $u$ a $v$, tal que os vértices internos no caminho estão no conjunto $\{0, ..., k-1\}$

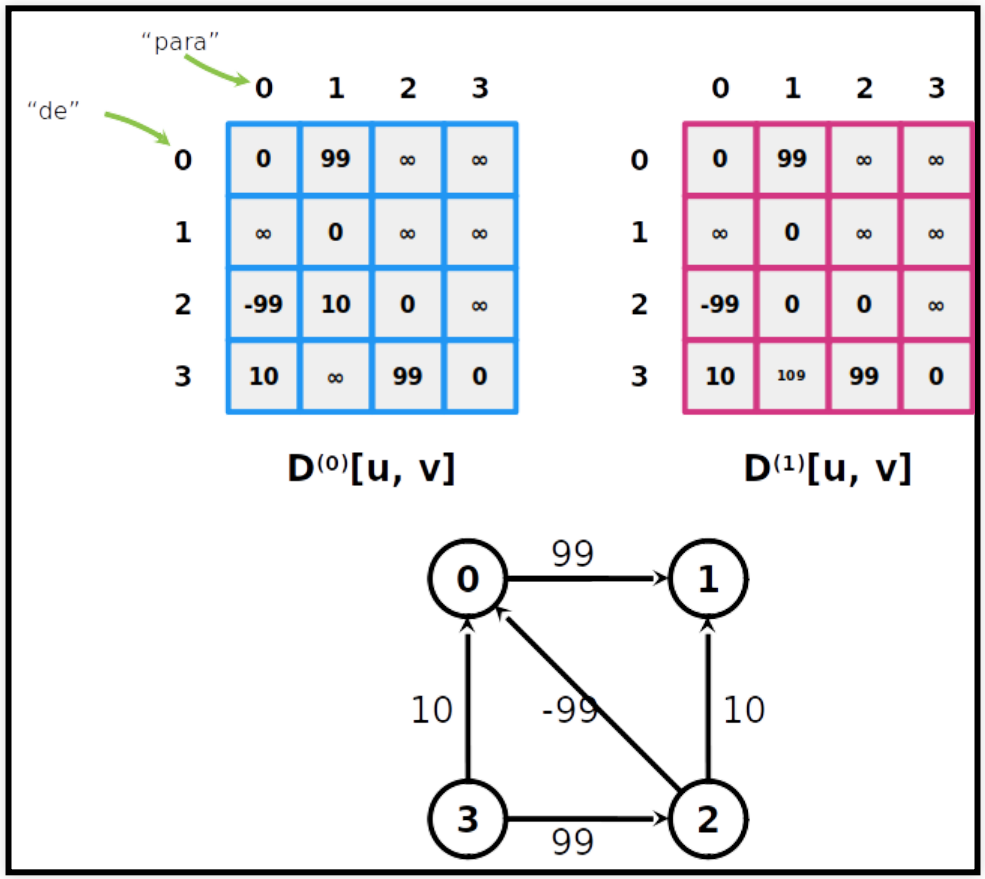
# Algoritmo de Floyd-Warshall



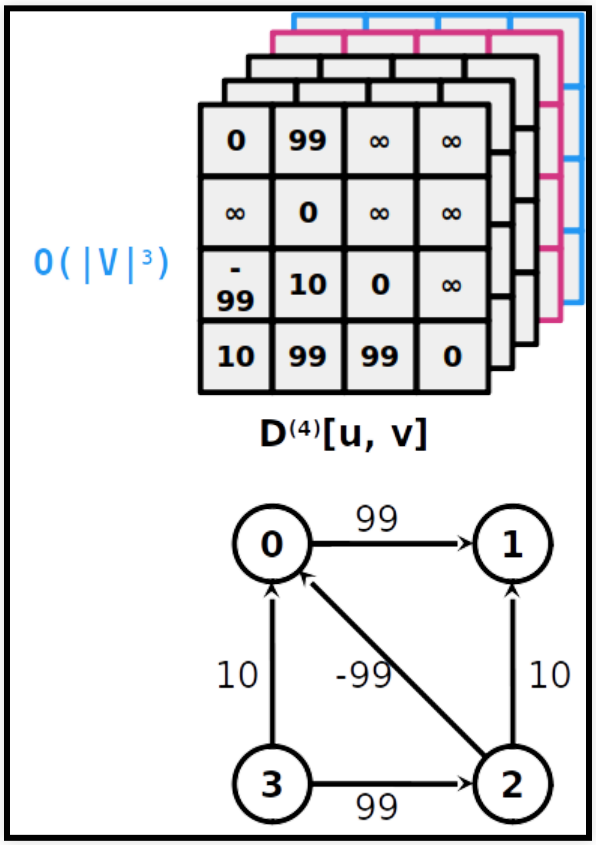
# Algoritmo de Floyd-Warshall



# Algoritmo de Floyd-Warshall

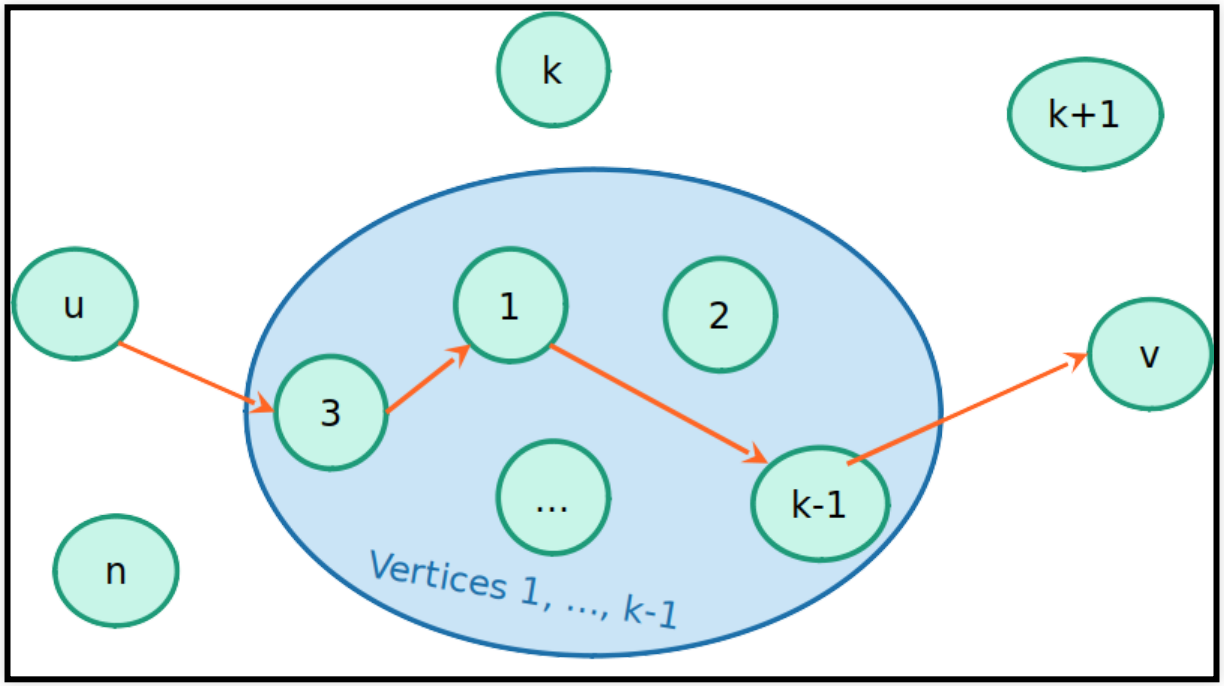


# Algoritmo de Floyd-Warshall



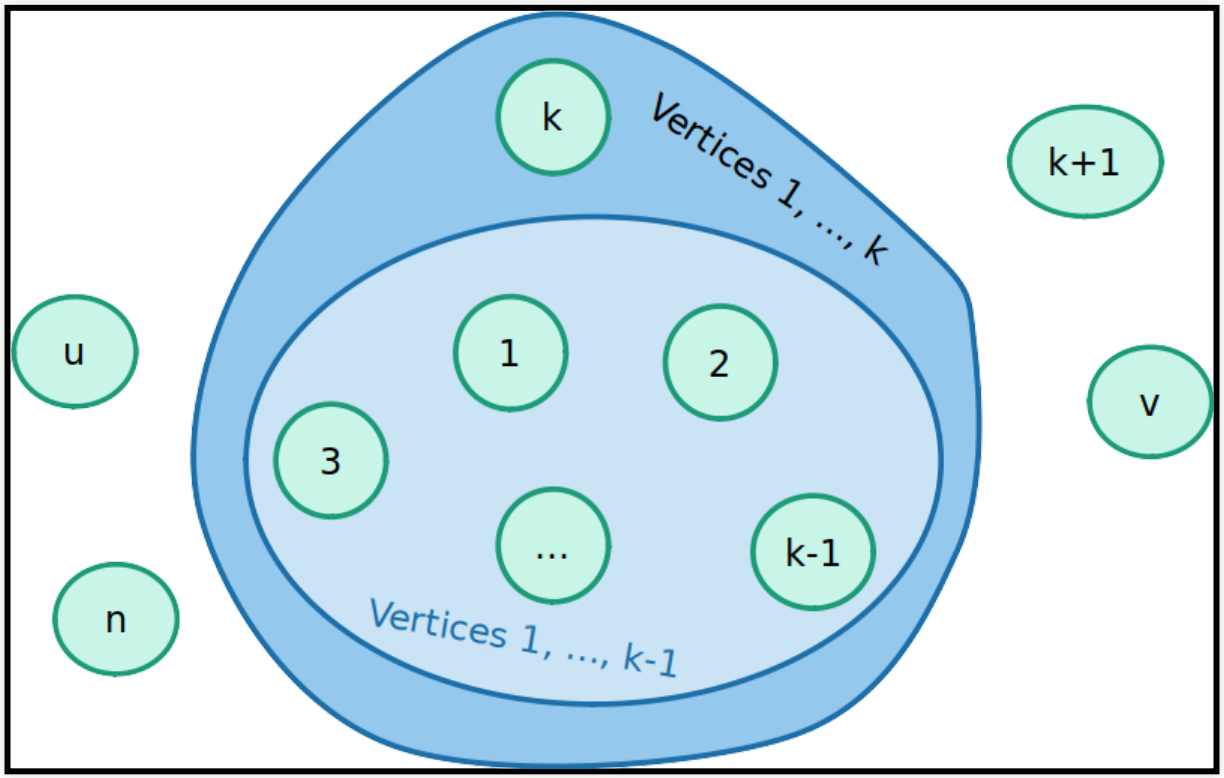
# Como atulizar os pesos?

- A cada passo $k$, temos que $D^{(k)}[u, v]$ é o caminho de $u$ a $v$, tal que os vértices internos no caminho estão no conjunto $\{0, ..., k-1\}$



# Como atulizar os pesos?

- Para atulizar a matriz no passo $k+1$, temos dois casos:
  1. O caminho mais curto passa pelo vértice $k$
  2. O caminho mais curto não passa pelo vértice $k$


k
Vertices 1, …, k
k+1
u
1
2
v
3
…
k-1
n
Vertices 1, …, k-1

# Como atulizar os pesos?

# Como atulizar os pesos?

# Como atulizar os pesos?

- Combinando os dois casos, temos:

$$D^{(k)}[u,v] = \min\{D^{(k-1)}[u,v], D^{(k-1)}[u,k] + D^{(k-1)}[k,v]\}$$

# Algoritmo de Floyd-Warshall

**Algoritmo 73:** FLOYD-WARSHALL$(G = (V, E),\ w)$

```
1  Seja W[0..n][0..n][0..n] uma matriz
2  para i = 1 até n faça
3      para j = 1 até n faça
4          se i == j então
5              W[i][j][0] = 0
6              j.predecessor[i] = i
7          senão se ij ∈ E(G) então
8              W[i][j][0] = w(ij)
9              j.predecessor[i] = i
10         senão
11             W[i][j][0] = ∞
12             j.predecessor[i] = null
13 para k = 1 até n faça
14     para i = 1 até n faça
15         para j = 1 até n faça
16             se W[i][j][k − 1] < W[i][k][k − 1] + W[k][j][k − 1] então
17                 W[i][j][k] = W[i][j][k − 1]
18             senão
19                 W[i][j][k] = W[i][k][k − 1] + W[k][j][k − 1]
20                 j.predecessor[i] = j.predecessor[k]
21 retorna W
```

# Algoritmo de Floyd-Warshall

- É fácil ver que a complexidade do algoritmo é $O(|V|^3)$

# Resumo

| **Algoritmo** | **Dijkstra** | **Bellman-Ford** | **Floyd-Warshall** |
|---|---|---|---|
| Problema | caminho mínimo de única fonte | caminho mínimo de única fonte | caminho mínimo para todos os pares |
| Complexidade | $O((\|V\| + \|E\|) \log \|E\|)$ (usando Heap) | $O(\|V\|\|E\|)$ | $O(\|V\|^3)$ |
| Vantagens | | Funciona com arestas de pesos negativos, e pode detectar ciclos negativos | Funciona com arestas de pesos negativos, e pode detectar ciclos negativos |
| Desvantagens | Pode não funciona com arestas de pesos negativos | | |
| Tipo | Guloso | Programação Dinâmica | Programação Dinâmica |