Análise de Algoritmos

Ronaldo Cristiano Prati

Bloco A, sala 513-2

ronaldo.prati@ufabc.edu.br

Tipos de problemas

- **Problema de decisão**, em que a resposta é sim ou não
- **Problema de busca**, em que queremos encontrar uma solução satisfazendo algumas propriedades se ela existir. Caso contrário, retornar que não exite
- **Problema de otimização**, em que cada solução tem um valor associado, e queremos encontrar uma solução com o melhor valor (máximo ou mínimo)

Tratabilidade

- **Intuição:**
  - Problema é tratável se existem algoritmos eficientes para ele
  - Problema é intratável se tais algoritmos não existem
- Até agora no curso, praticamente todos os problemas que encaramos eram tratáveis
- Mas nada garante que seja sempre este o caso

Algoritmo eficiente

- Definição clássica de eficiência:
  - Um algoritmo é eficiente se e somente se ele executa em tempo polinomial em um computador serial
- Se o grau do polinômio for grande, o problema deve ser inviável
  - $O(n), O(n \log n), O(n^2 \log^2 n)$ - ok!
  - $O(n^{10.000.000.000})$ - eficiente?
- Tempo de execução exponencial podem ser eficientes na prática
  - $O(2^n), O(n!)$ - ok!
  - $O(1.0000000001^n)$ - ineficiente?

Tratabilidade

- Um problema é chamado de **tratável** se e somente se existe um algoritmo eficiente (isto é, de tempo polinomai) que o revolsa.
- Um problema é chamado de **intratável** se e somente se não existe um algoritmo eficiente que o resolva.
- Problemas intratáveis são comuns. Precisamos reconhecê-los quando nos deparamos com algum deles na prática.

A classe de complexidade P

- **P** é a classe dos problemas resolvidos em tempo polinomial
- Exemplos de problemas em P:
  - Caminho mais curto
  - Ordenação
  - Árvore geradora mínima
  - Fluxo em redes
  - Multiplicação de matrizes

A classe de complexidade P

- Infelizmente, nem todo problema está em P 😮
- Existem problemas para os quais não existe qualquer algoritmo
  Ex. problema da Parada
- Existem outros para os quais, por mais que se busque, não sãoconhecidos algoritmos polinomiais
  Ex.: problema do Caixeiro Viajante (TSP)
- Mas, a princípio, isso não garante que tais algoritmos não existam
- Como descrever uma classe que englobe problemas como o TSP?

A classe de complexidade NP

- A classe **NP** consiste em todos os **problemas de decisão** em que podemos **verificar** se uma solução é correta em **tempo polinomial**
- Essas definições são algorítmicas
- Definiçõeses formais destas classes vem da área de teoria da computação
- O nome NP significa "Nondeterministic Polynomial"

A classe de complexidade NP

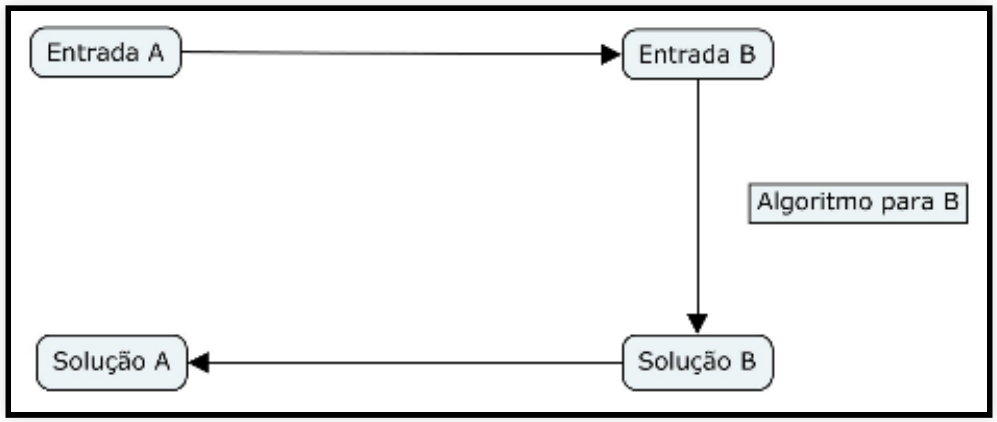
- Todo problema em NP é resolvível usando busca por força bruta
  - O espaço de busca é no máximo exponencial, e cada solução pode ser testada em tempo polinomal
- Exemplos:
  - Satisfatibilidade (SAT)
  - Cobertura por Vértices
  - Problema do Caixeiro Viajante (TSP)

P e NP

- Situação dos problemas
  - Temos problemas em P, que também estão em NP (por que?)
  - Temos problemas em NP, que não sabemos se estão em P
- Muitos problemas importantes na segunda situação
- Como corroborar a dificuldade destes problemas?
  - Vamos utilizar evidências relativas, usando:
    - Redução
    - Completude

Redução

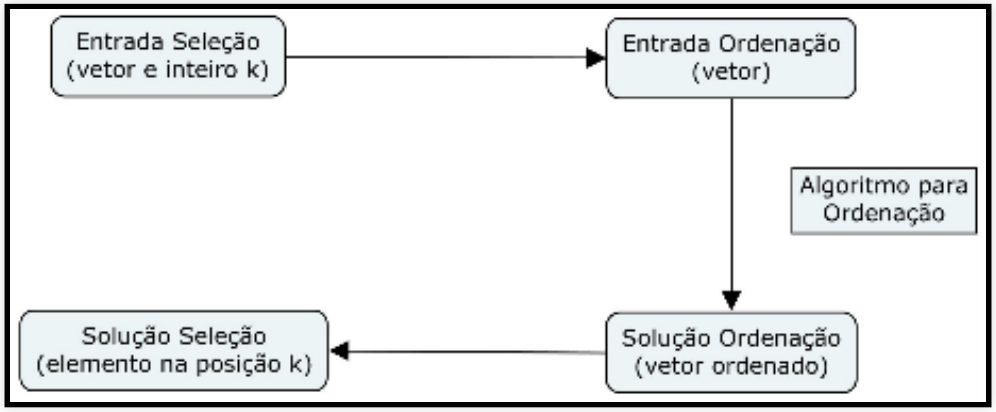
- O problema A se reduz ao problema B se conseguimos resolver qualquer instância de A usando um algoritmo que resolve B



- Transformamos a entrada A em entrada B, e depois a solução B em solução A
- Se transformações são polinomiais, A é polinomialmente redutível a B

Redução

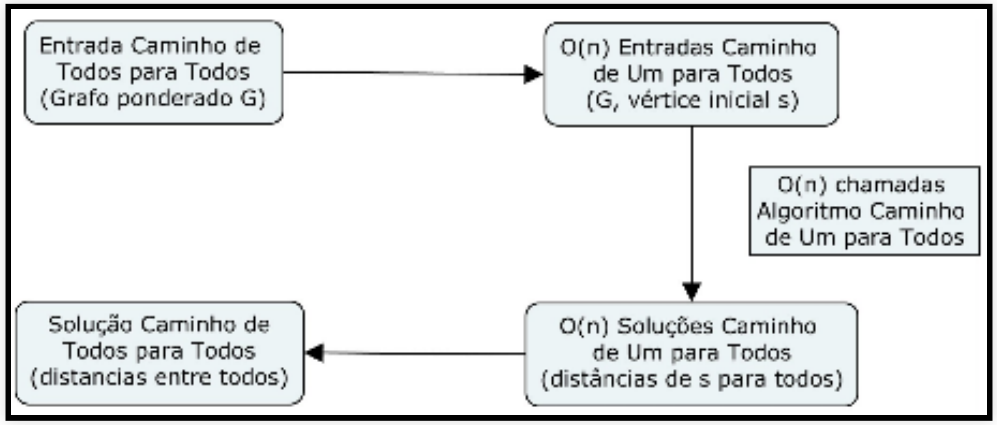
- Exemplo: Seleção em Ordenação. Vamos usar um algoritmo de ordenação para selecionar o k-ésimo menor elemento de de um vetor



  - Esta reducãoo resolve o problema da seleção em tempo $O(n \log n)$
  - Note que é possível resolver a seleção em tempo linear

Redução

- Numa redução o algoritmo para B pode ser utilizado várias vezes
- Exemplo: Caminho Todos para Todos em Caminho Um para Todos



  - Notem que nesse caso o algoritmo obtido ainda é polinomial

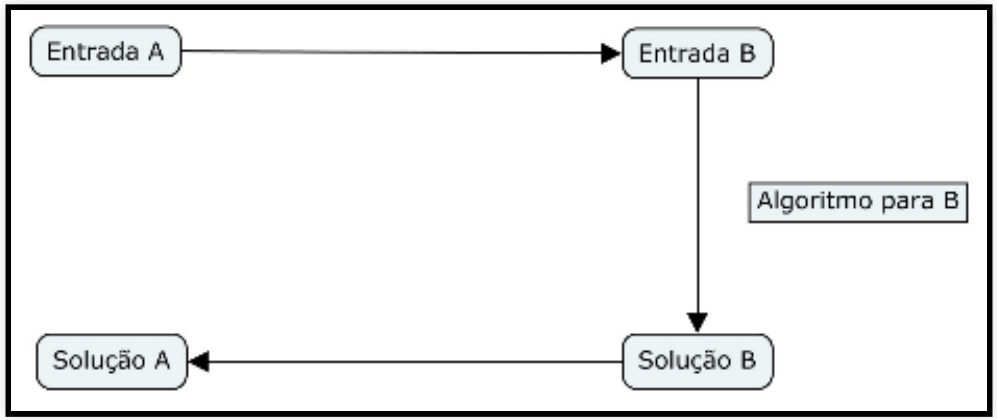
Redução

- Reduçãoo entre problemas é uma técnica valiosa para o projeto de algoritmos
- Permite utilizar soluções já conhecidas para resolver novos problemas
- Um projetista de algoritmos sempre deve se perguntar:

> *"Será que este problema não se parece com algum que eu já conheço?"*

Redução

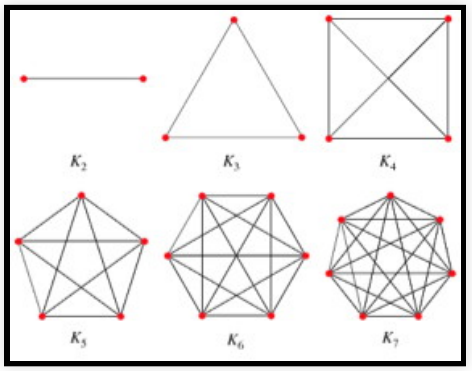
- Redução usada para atestar a dificuldade relativa de um problema
- Como provar que um problema é tão difícil quanto outro?



- Observe que B não pode ser mais fácil do que A

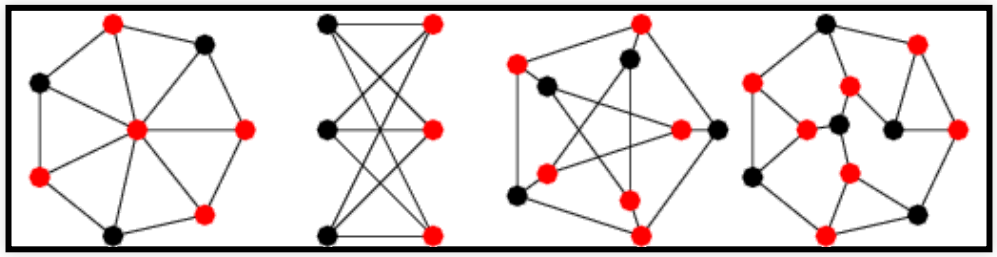
Clique-k

- Dados um grafo G e um inteiro positivo k, existe conjunto $S \subseteq V(G)$ de vértices tais que para todo par $u, v \in S$ existe uma aresta $uv \in E(G)$ (S é clique) e $|S| \geq k$?



k-Cobertura por vértices

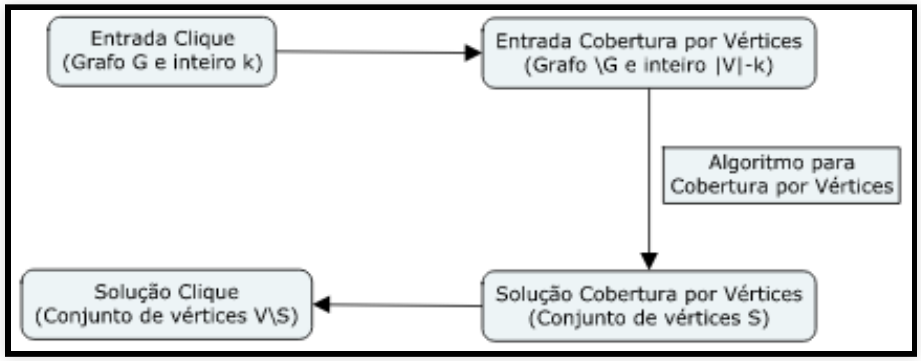
- Dado um grafo G e um inteiro k, existe conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que, para toda aresta $uv \in E(G)$, $u \in S$ ou $v \in S$ e $|S| \leq k$?



- k-Cobertura por vértices está em NP pois, dados G, k, e S podemos verificar em tempo polinomial se $|S| \leq k$ e se todas as arestas do grafo tem ao menos uma aresta no conjunto.

Redução

- Exemplo: Clique-k é redutivel para k-cobertura por vértices



- Se clique-k não tiver um algoritmo polinomial
- Então k-cobertura por vértices também não tem um algoritmo de tempo polinomial

Redução

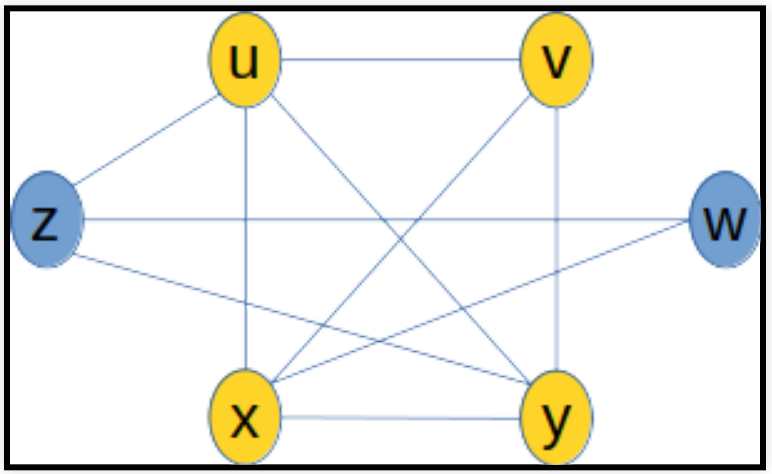
- Exemplo: Clique-k é redutivel para k-cobertura por vértices
  - O complemento G_c de um grafo G contém exatamente as arestas que não estão em G
  - Podemos calcular G_c em tempo polinomial
  - G tem uma clique de tamanho k se e somente se G_c tem uma k-cobertura de tamanho $|V| - k$

Redução

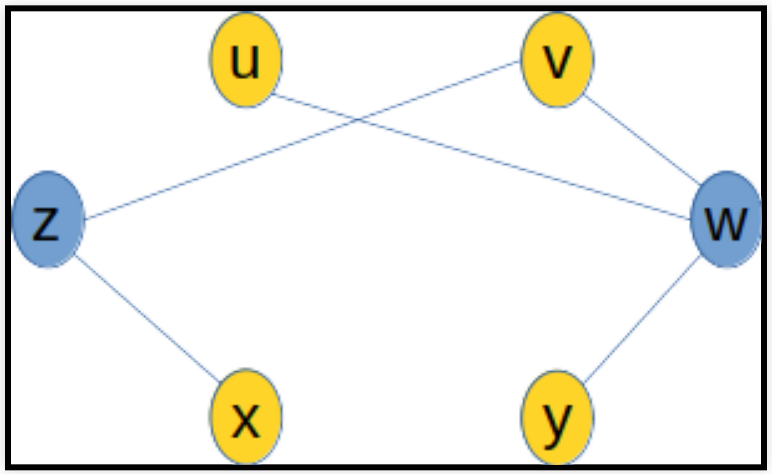
Redução

- Exemplo: Clique-k é redutivel para k-cobertura por vértices
- Afirmação: Se G tem um clique de tamanho k, G_c tem uma k-cobertura de tamanho $|V| - k$
  - Para todo $u, v \in V$, se $(u, v) \in G_c$, então $u \in V'$ ou $v \in V'$, ou ambos
  - Caso não fosse verdade, $(u, v) \in E(G)$
  - Em outras palavras, todos os vértices de $V - V'$ estão conectados por uma aresta, então $V - V'$ é uma clique
  - Uma vez que $|V| - |V'| = k$, o tamanho da clique é k

Exemplo



- G possui uma clique V' de tamanho k



- G_c possui uma cobertura por vértice $V \setminus V'$ de tamanho $n - k$

Redução

- Interpretaçõees para “A é redutível a B”:
  - "Positiva" A' e no máximo tão difícil quanto B
  - "Negativa" B' e pelo menos tão difícil quanto A
- Primeira expande o conjunto de problemas tratáveis
- Segunda expande o conjunto dos intratáveis

Completude

- Um Problema Π é C-Completo se:
  - Π está em C
  - Todo problema em C é redutível a Π
- Podemos pensar que Π é o "problema mais difícil" em C
- Notem quão forte é essa definição
- E que não é tão óbvio que algum problema Π em C a satisfaça

Completude

- Apesar disso, vamos supor que existam problemas C-Completos
- Sendo Π um problema em C
- Para mostrar que Π´e C-Completo temos que:
  - Escolher um problema C-Completo Π'
  - Reduzir o problema Π' para Π
- Isso funciona pois:
  - Todo problema em C é redutível a Π'
  - E por consequência é redutível a Π

Completude

- Voltamos à questão:

> *"Como mostrar a dificuldade dos problemas em NP (que não sabemos se estão em P)?"*

- Um forte atestado de dificuldade seria mostrar que todo problema de NP reduz pra um desses problemas
- Já que isso mostraria que esse problema e o mais difícil dentre todosde NP e que bastaria resolver ele pra resolver todos os outros
- Mas, será que a classe dos problemas NP-Completos é ou não vazia?

Completude

- Por incrível que pareça, existem muitos problemas NP-Completos
- Sendo um exemplo notável o problema da satisfatibilidade (SAT)
- Já sabemos que para mostrar que um problema é NP-Completo, basta reduzir qualquer problema NP-Completo a ele
- Assim, muitos outros problemas foram provados NP-Completos

Satisfatibilidade

- Considere um conjunto de variáveis booleanas $x_1, x_2, \cdots, x_n$
- E uma fórmula composta por essas variáveis e conjunçẽos (operador e) de conjuntos de disjunções (operadores ou). Por exemplo:

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2)$$

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4 \vee x_5 \vee \overline{x_6})$$

- Cada conjunto de disjunção é chamado de cláusula.
- Um literal é uma variável x ou sua negação $\overline{x}$
- O problema da satisfatibilidade consiste em verificar se a fórmula é satisfatível, isso é, existe uma atribuição de valores para as variáveis tal que a fórmula tem o valor 1.

3-SAT

- Uma fórmula booleana formada por conjunções de cláusulas que contém exatamente 3 literais é chamado de 3-CNF. Por exemplo

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4)$$

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\overline{x_4} \vee x_5 \vee \overline{x_6})$$

- O problema 3-SAT consiste em verificar se uma fórmula 3-CNF é satisfatível, ou seja, se existe uma atribuição de valores para as variáveis tal que a fórmula 3-CNF tenha valor 1.

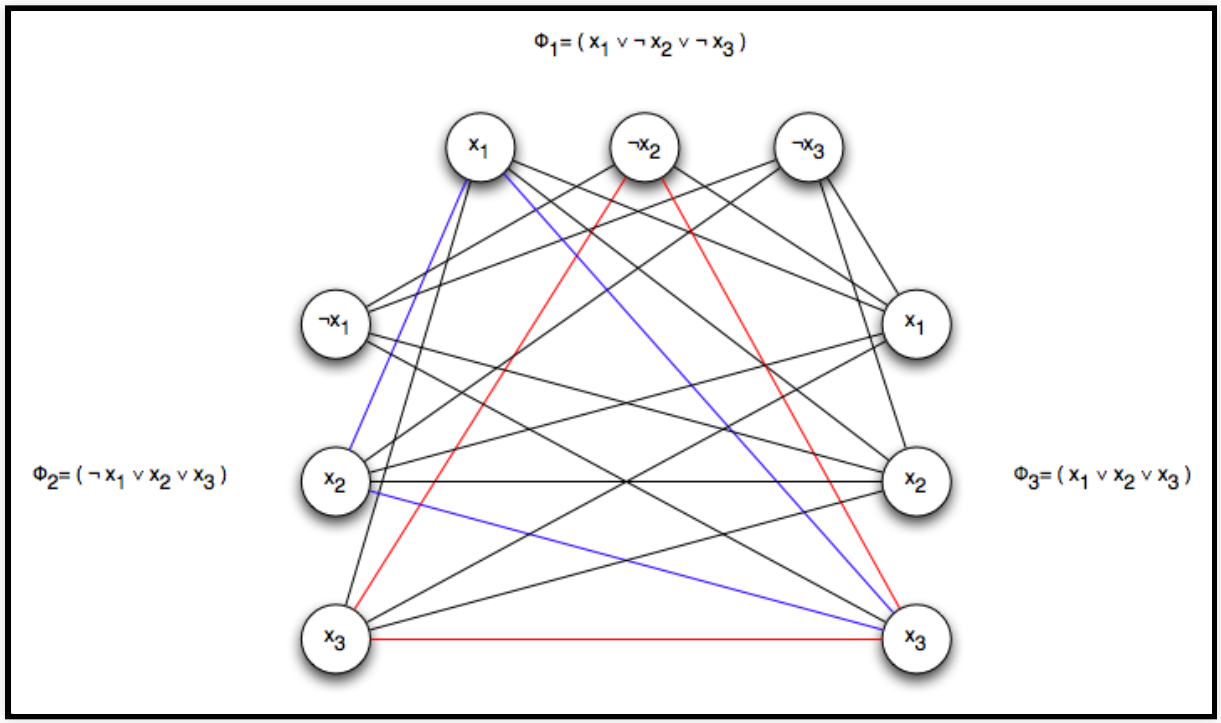
3-SAT é NP-completo

- Observe que 3-SAT está em NP pois dada uma fórmula e uma atribuição das variáveis, é fácil verificar se essa atribuição satisfaz a fórmula
- Em 1972, Stepehn Cook e Richard Karp provaram que 3-SAT é NP-completo.
- Hoje em dia, se conhecem milhares de problemas que são NP-Completos

3-SAT é redutível para Clique-k

- Dada uma fórmula 3-CNF ϕ com k cláusulas sobre as variáveis $x_1, x3, \cdots, x_n$
- Construímos um grafo G que possui $3k$ vértices, de modo que cada cláusula tem 3 vértices representando cada um de suas variáveis.
- Um par de vértices v e w de G forma uma aresta se e somente se v e w estão em cláusulas diferentes, v corresponde a um literal x e w não corresponde a um literal $\overline{x}$

3-SAT é redutível para Clique-k



3-SAT é redutível para Clique-k

3-SAT é redutível para Clique-k

NP-Completude

$P \stackrel{?}{=} NP$

- O problema $P \stackrel{?}{=} NP$ é um problema classico
- Se existir algoritmo polinomial para um problema NP-Completo...
- conseguimos resolver todos os problemas em NP em tempo polinomial, provando que $P = NP$...
- e respondendo assim à maior questão em aberto da ciência da computação.
- Entretanto, muitos pesquisadores acreditam que isso não é possível, mas não se conhece uma prova que $P \neq NP$

Problemas NP-completos

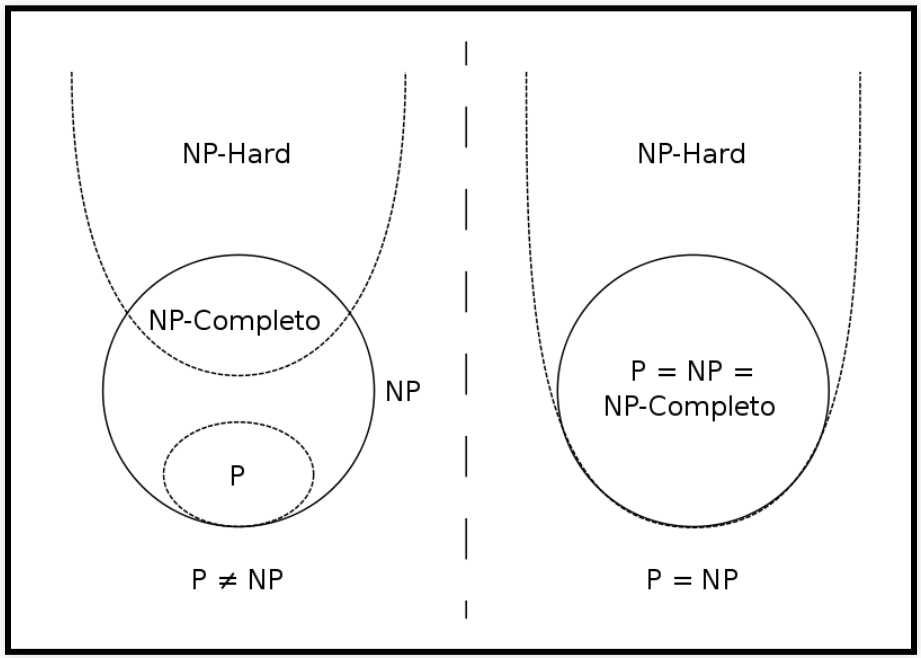
- A ligação entre NP-Completude e a questão $P \stackrel{?}{=} NP$ demonstra a importância desta classe para a ciência da computação
- Mas por que um projetista de algoritmos deveria se preocupar?
- Porque problemas NP-Completos são extremamente comuns
- E existe pouca esperança de obter um algoritmo polinomial para eles

Problema NP-difícil

- NP-difícil é o conjunto de problemas Q tais que todo outro problema de NP é redutível a Q
- O problema Q é pelo menos tão difícil quanto qualquer outro problema em NP
- O problema Q não precisa estar em NP, pois não precisa ser um problema de decisão.
- Uma outra definição para NP-Completo são os problemas NP que são NP-difíceis.

Problema NP-difícil

- Se $P \neq NP$, então não existe solução polinomial para os problemas NP -Hard



Problemas NP-completos

- Assim, se voce se deparar com um problema difícil
- É importante saber verificar se ele é NP-Completo ou NP-Difícil
- Para tratá-lo de modo adequado
- Hoje não apresentamos opções para lidar com problemas NP-Completos
- Mas mostramos como identificá-los