Análise de Algoritmos

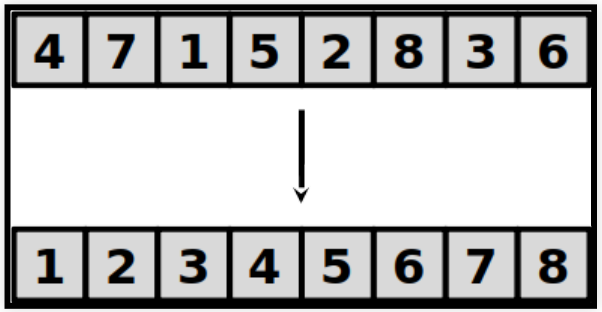
Ronaldo Cristiano Prati

Bloco A, sala 513-2

ronaldo.prati@ufabc.edu.br

Ordenação

- Algortimos de ordenação ordenam uma sequência de valores
  - vamos assumir por enquanto que os valores a serem ordenados são todos distintos entre si.



Ordenação por inserção

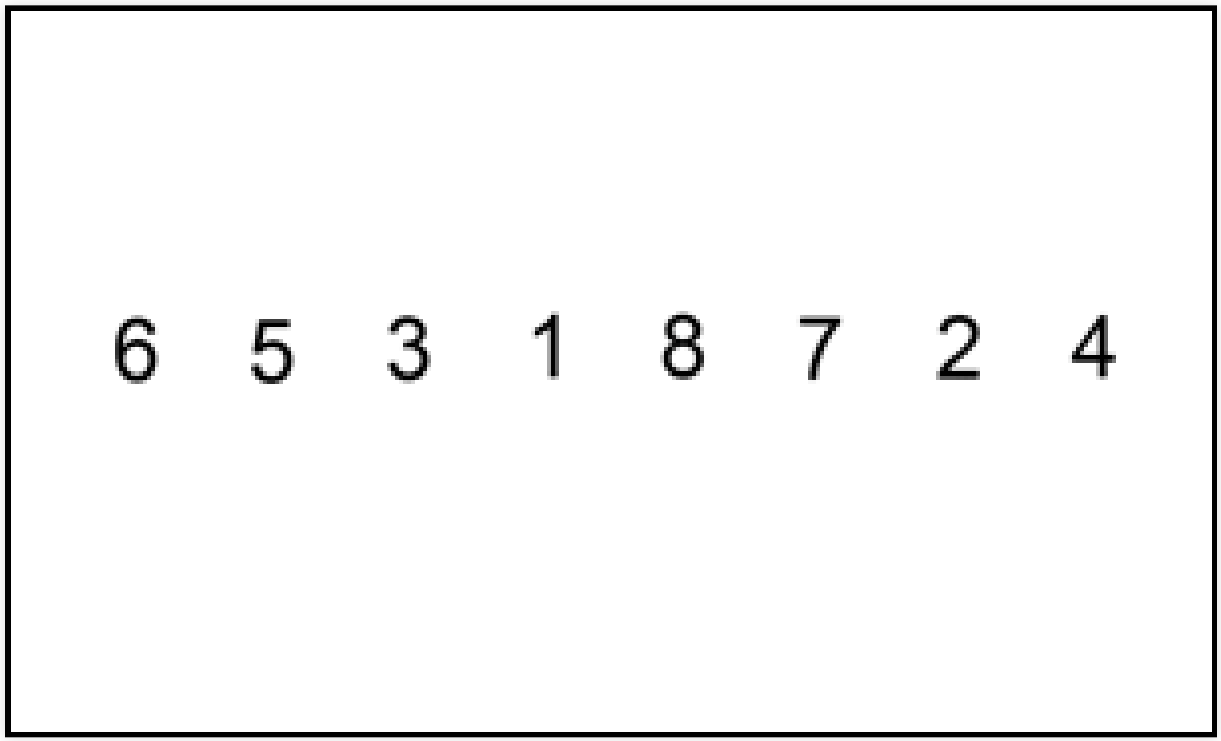
- Dado um vetor A com n números, a ordenação por inserção irá executar n rodadas de instruções em que:
- A cada rodada, temos um subvetor de A ordenado que contém um elemento a mais do que o subvetor da rodada anterior:
  - Ao fim da $i-1$-ésima rodada, o subvetor $A[1..i-1]$ estará ordenado
- Sabendo que o $A[1..i-1]$ está ordenado, é fácil encaixar o elemento A[i] na posição correta, para deixar o subvetor $A[1..i]$ ordenado:
  - Seja $atual = A[i]$. Iterativamente troque o elemento $atual$ com os anteriores enquanto eles forem maiores que $atual$.

Ordenação por inserção

- Algoritmo InsertionSort

```
1 para i = 2 até n faça
2     atual = A[i]
3     j = i − 1
4     enquanto j > 0 e A[j] > atual faça
5         A[j + 1] = A[j]
6         j = j − 1
7     A[j + 1] = atual
```

Ordenação por inserção



Ordenação por inserção

Uma possível implementação em Python

```
def insertion_sort(A):
  for i in range(1, len(A)):
    atual = A[i]
    j = i - 1
    while j >= 0 and A[j] > atual:
      A[j+1] = A[j]
      j -= 1
    A[j+1] = atual
```

(observe que em Python a posição inicial do vetor é 0, então os índices foram ajustados adequadamente.)

Análise do InsertionSort

- Vamos reponder as três perguntas com relação a análise de algoritmos:
  1. O algoritmo está **correto**?
  2. Quantos **recursos** o algoritmo consome?
  3. É possível fazer **melhor**?

Corretude do InsertionSort

- Algoritmos frequentemente inicializam, modificam, apagam ou inserem novos dados
  - Existe uma maneira de provar que o algoritmo funciona, sem checar (as infinitas) entradas?
- Ideia principal: encontrar um invariante.
  - para raciociar sobre o comportamento de um algoritmo, frequentemente é útil identificar coisas que não mudam.

Invariante do InsertionSort

- Suponha que temos o vetor $[1, 2, 3, 5, 6, 7, 8|\mathbf{4}]$, em que o subvetor $[1, 2, 3, 5, 6, 7, 8]$ já está ordenado e o elemento atual é o $\mathbf{4}$.
- Iserir o $\mathbf{4}$ imediatamente à direita do maior elemento do subvetor que é menor que $\mathbf{4}$ (isto é, à direita de 3) produz um outro vetor ordenado.
- Observe que este novo vetor é mais longo que o anterior por um elemento: $A = [1, 2, 3, \mathbf{4}, 5, 6, 7, 8]$

Invariante do InsertionSort

- Podemos aplicar essa ideia a cada passo:
  - $[6|, \mathbf{5}, 3, 1, 8, 7, 2, 4]$: o subvetor $[6]$ está ordenado. Inserir o $\mathbf{5}$ na posição correta gera um subvetor ordenado $[5, 6]$
  - $[5, 6|, \mathbf{3}, 1, 8, 7, 2, 4]$: o subvetor $[5, 6]$ está ordenado. Inserir o $\mathbf{3}$ na posição correta gera um subvetor ordenado $[3, 5, 6]$
  - $[3, 5, 6, |\mathbf{1}, 8, 7, 2, 4]$: o subvetor $[3, 5, 6]$ está ordenado. Inserir o $\mathbf{1}$ na posição correta gera um subvetor ordenado $[1, 3, 5, 6]$
  - ...
  - $[1, 2, 3, 5, 6, 7, 8|\mathbf{4}]$: o subvetor $[1, 2, 3, 5, 6, 7, 8]$ está ordenado. Inserir o $\mathbf{4}$ na posição correta gera um subvetor ordenado $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$

Corretude do InsertionSort

- Existe um nome para a condição que é verdadeira antes e depois de cada iteração de um laço: **invariante de laço**
- Para provar a corretudo do InsertionSort, vamos usar o invariante de laço e fazer uma **prova por indução**
- Nesse caso, o invariante de laço é que, ao início da iteração i (a interação que queremos inserir o elemento $A[i]$ no subvetor ordenado), o subvetor $A[1..i-1]$ está ordenado

Corretude do InsertionSort

- Em uma prova por indução, temos quatro componentes:
  - Hipótese de indução: o invariante de laço é verdadeiro depois da i-ésima iteração
  - Caso base: o invariante de laço é verdadeiro na primeira iteração.
  - Passo de indução: se o invariante de laço é verdadeira dapara a i-ésima interação, então ele também é verdadeiro para $i + 1$-ésima iteração
  - Conclusão: se o invariante de laço é veradeira após a última iteração, então o algoritmo está correto!

Corretude do InsertionSort

- Especificamente para o InsertionSort:
  - Hipótese de indução: na iteração i, $A[1..i-1]$ está ordenado
  - Caso base: $A[1]$ está ordenado.
  - Passo de indução: ao inserir o elemento $A[i]$, $A[1..i]$ continua ordenado
  - Conclusão: na n-ésima iteração (ao final do algortimo), $A[1..n]$ (portanto o vetor inteiro) estará ordenado.

Corretude do InsertionSort

- O caso base é verdade, pois um sub-vetor de 1 único elemento está ordenado.
- Vamos supor que a hipótese de indução é válida para um $i \in (2..n)$ (isto é, $A[1..i-1]$ está ordenado).
- Enquanto o laço "move" o elemento $atual (A[i])$ para a esquerda, os elementos maiores que $atual$ são movidos uma posição para a direita, e continuam or ordem.

Corretude do InsertionSort

- Quanto $atual$ chega na posição "correta" no subvetor, todos os elementos à direita são maiores e todos os elementos a direta são menores que $atual$. Portanto, $A[1..i]$ está ordenado e a invariante se mantém.
- O laço termina quando $i = n$, portanto $A[1..n]$ está ordenado e contendo todos os elementos do vetor A.
- Podemos concluir que o algoritmo está correto.

Quantos recursos o algoritmo consome?

- A quantidade de memória extra é desprezível: só precisamos de espaço extra para armazenar $atual$ (ordenação *in place*)
- Com relação ao tempo:
  - O laço da linha 1 é executado n vezes. Consequentemente, as linhas 2, 3 e 7 são executadas $n - 1$ vezes cada.
  - Seja r_i a quantidade de vezes que o laço da linha 4 é executado para a iteração i. As linhas 5 e 6 são executacas $r_i - 1$ vezes cada.

Quantos recursos o algoritmo consome?

Quantos recursos o algoritmo consome?

- Melhor caso:
  - se o vetor já estiver odenado, o laço da linha 4 é executado 1 única vez ($r_i = 1, \forall i \in 2..n$) para cada iteração.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2n + 3\sum_{i=2}^{n} r_i \\
&= 5n - 3
\end{aligned}
$$

Quantos recursos o algoritmo consome?

- Pior caso:
  - se o vetor estiver inversamente odenado, o laço da linha 4 é executado i vezes ($r_i = i, \forall i \in 2..n$) para cada iteração.

$$T(n) = 2n + 3\sum_{i=2}^{n} r_i$$
$$= n^2 + 2n - 6$$

(veja a somatório de Gauss para calcular o somatório)

Quantos recursos o algoritmo consome?

- Caso médio:
  - para fazer uma análise do caso médio, precisamos fazer alguma suposição sobre r_i. Supunha que, em um caso típico, linha 4 é executada metade das vezes com relação ao pior caso ($r_i = \frac{i}{2}, \forall i \in 2..n$) para cada iteração.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2n + 3\sum_{i=2}^{n} r_i \\
&= 2n + \frac{n(n-1)}{4}
\end{aligned}
$$

Notação assintótica

- O que significa medir o "tempo de execução" de um algoritmo?
  - Engenheiros provavelmente se importam com o "tempo de execução" (wall time): quanto tempo o algoritmo leva em segundos, minutos, horas, etc.
  - Isso depende de características do hardware, implementação, linguagem de programação, etc.
  - Apesar de importante, não será o nosso foco
  - Ao invés, queremos uma medida que é independente dessas considerações.

Notação assintótica

- Ideia principal: focar como o tempo de execução escala em função de n (o tamanho da entrada).
  - Vantagens:
    - Abstrai o hardware, linguagem de programação, etc.
    - Mais genérica que a abordagem de implementar e testar
  - Desvantagens:
    - Só faz sentido se n é grande comparado com as constantes ($9.999.999.999.999n$ é melhor que n^2?)

A notação O

- A notação O (big-O) é uma notação matemática para considerar o **limite superior** para o crescimento de uma função
  - Informalmente, ela pode ser obtida ignorando-se as constantes e termos que não dominam o crescimento da função

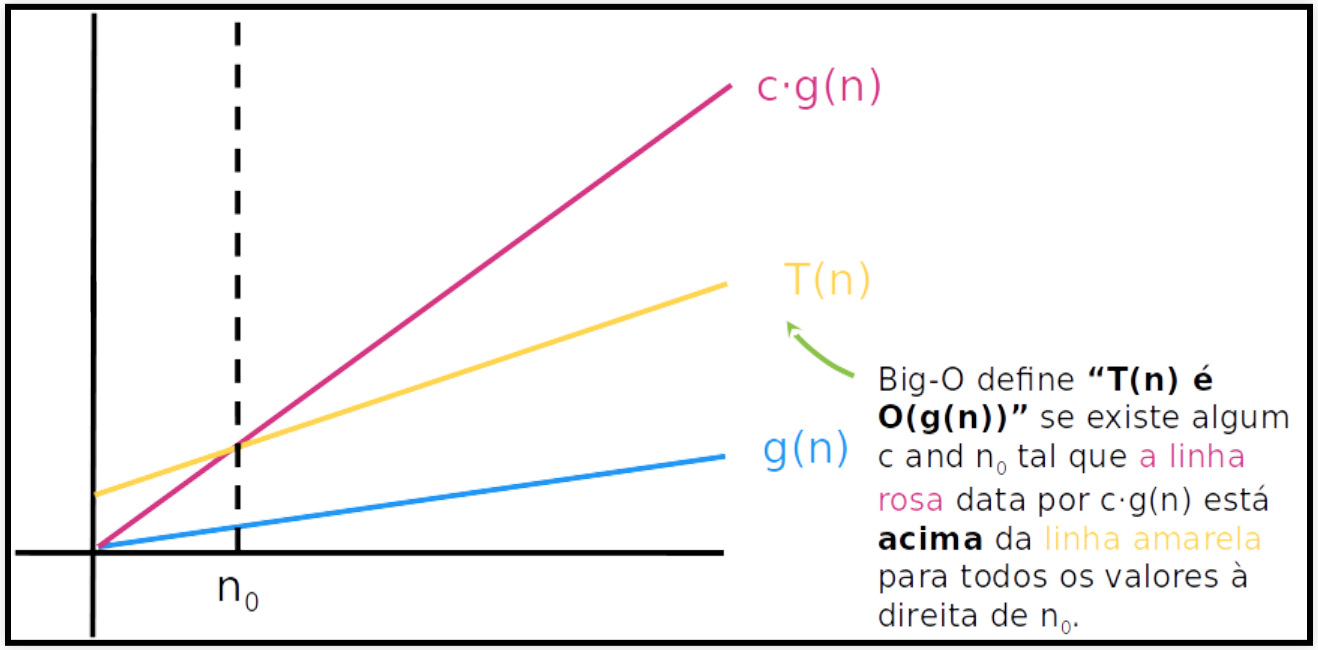
A notação O

- Seja $T(n)$ e $g(n)$ funções sobre inteiros positivos.
  - Podemos pensar em $T(n)$ como funções de tempo de execução: positiva e crescente em função de n.
- Dizemos que "$T(n)$ é $O(g(n))$" se $g(n)$ cresce pelo menos tão rápido quanto $T(n)$ conforme, n cresce.
- Mais formalmente

$T(n) = O(g(n))$ *se existem constantes positivas* C *e* n_0 *tais que* $T(n) \leq Cg(n)$ *para todo* $n \geq n_0$*;*

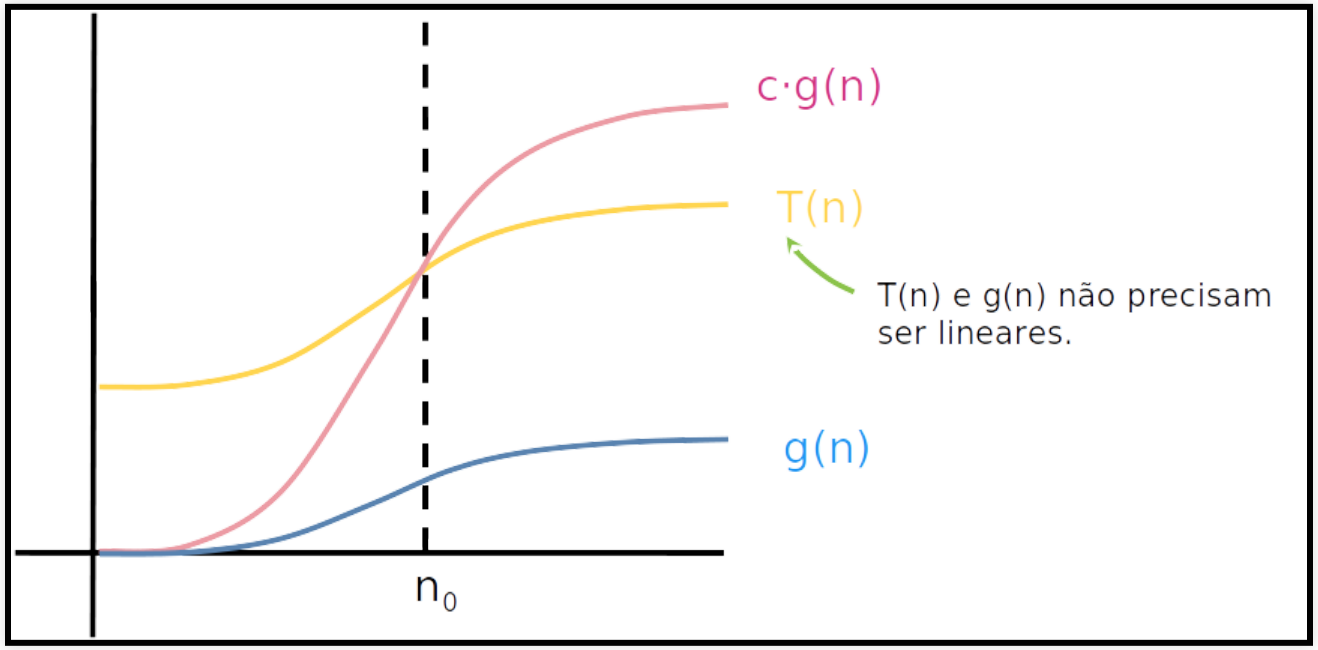
A notação O

- Graficamente:



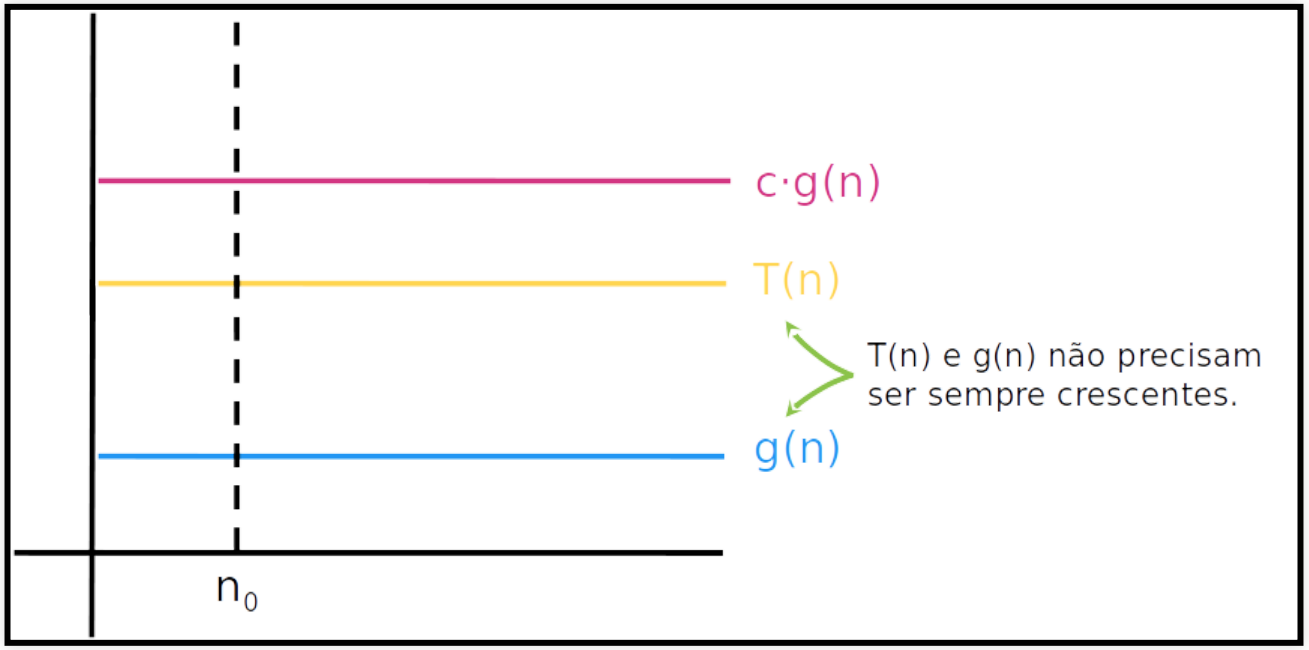
A notação O

- Graficamente:



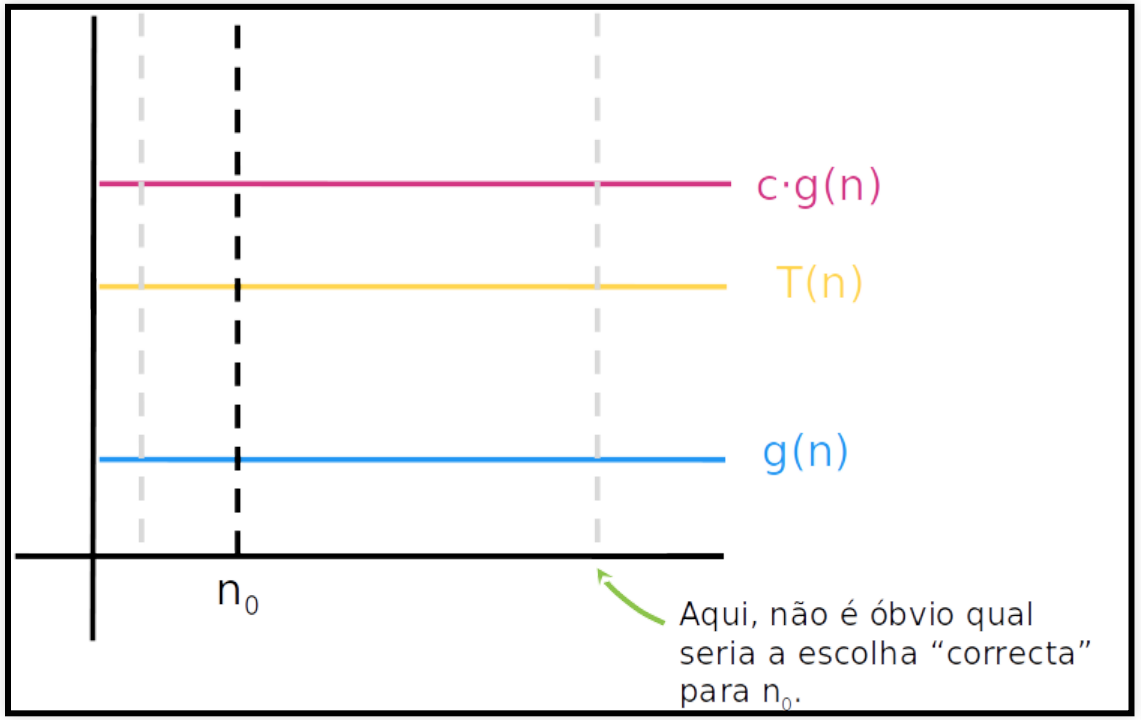
A notação O

- Graficamente:



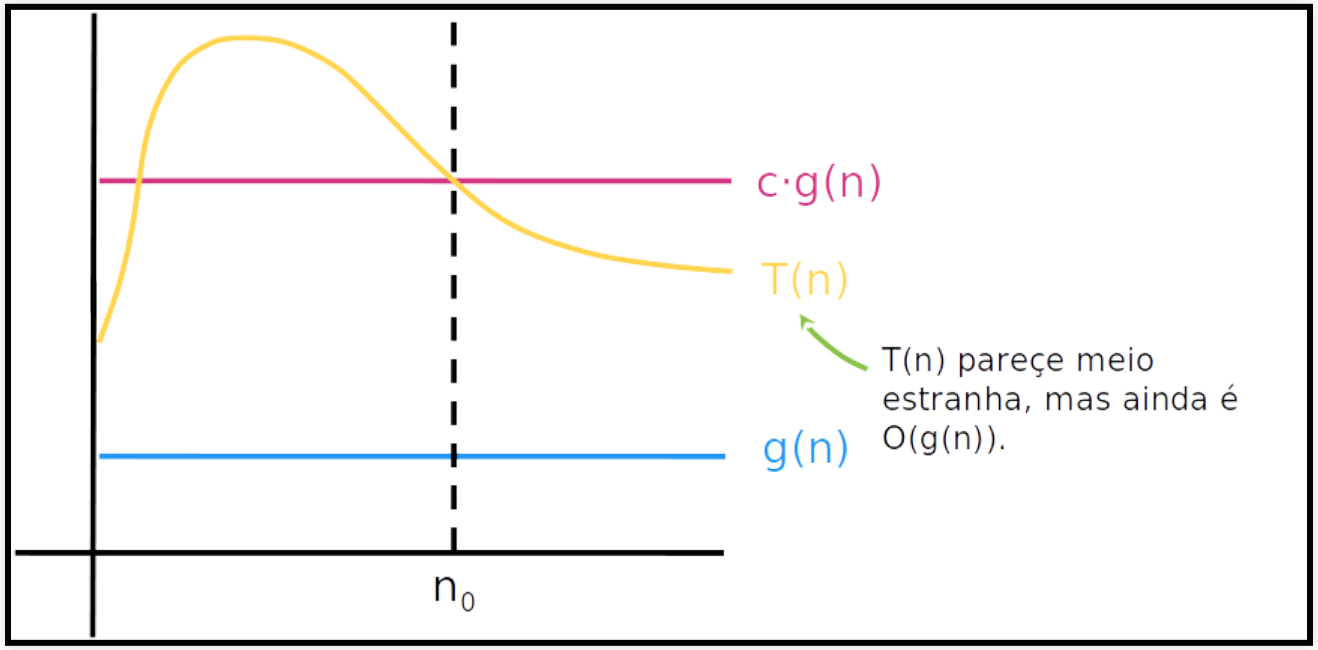
A notação O

- Graficamente:



A notação O

- Graficamente:



A notação O

A notação Ω

- A notação Ω (big-Ω) é uma notação matemática para considerar o **limite inferior** para o crescimento de uma função
  - Informalmente, ela pode ser obtida ignorando-se as constantes e termos que não dominam o crescimento da função

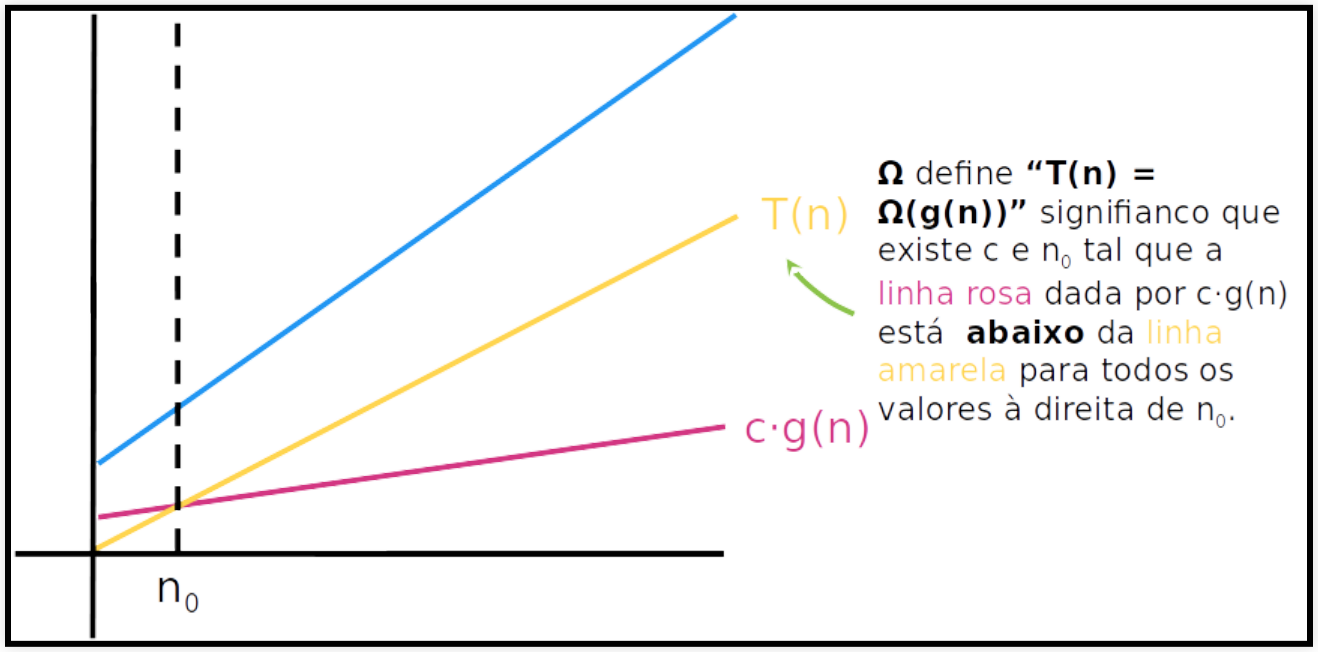
A notação Ω

- Seja $T(n)$ e $g(n)$ funções sobre inteiros positivos.
- Dizemos que "$T(n)$ é $\Omega(g(n))$" se $g(n)$ cresce no máximo tão rápido quanto $T(n)$ conforme, n cresce.
- Mais formalmente

$T(n) = \Omega(g(n))$ *se existem constantes positivas* c *e* n_0 *tais que* $cg(n) \leq T(n)$ *para todo* $n \geq n_0$;

A notação Ω

- Graficamente:



A notação Ω

- Similarmente, podemos provar que $T(n) = \Omega(g(n))$, temos que mostrar que existe um c e n_0 que satizfaz a definição.
- Por exemplo, queremos provar que $T(n) = 10n^2 + 5n + 3$ and $g(n) = n^2$. Podemos mostrar que $T(n) = \Omega(g(n))$ encontrando um c e n_0 de acordo com a definição. Por exemplo:

$$c \leq 10 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}$$

para $n \geq 1$ temos que

$$10 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \geq 10$$

Basta tomar $n_0 = 1$ e $c = 10$, que $T(n) = \Omega(g(n))$

A notação Θ

- Dizemos que $T(n) = \Theta(g(n))$ se, e somente se:
  - $T(n) = O(g(n))$ e
  - $T(n) = \Omega(g(n))$
- $T(n) = 10n^2 + 5n + 3 = \Theta(n^2)$ pois, como vimos anteriormente, $T(n) = 10n^2 + 5n + 3 = O(n^2)$ e $T(n) = 10n^2 + 5n + 3 = \Omega(n^2)$

Propriedades da notação assintótica

- Sejam $f(n)$, $g(n)$ e $h(n)$ funcoes positivas. Temos que:

1. $f(n) = \Theta(f(n))$;
2. $f(n) = \Theta(g(n))$ se e somente se $g(n) = \Theta(f(n))$;
3. $f(n) = O(g(n))$ se e somente se $g(n) = \Omega(f(n))$;
4. Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = \Omega(h(n))$, então $f(n) = O(h(n))$; O mesmo vale substituindo O por Ω;
5. Se $f(n) = \Theta(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$, entao $f(n) = O(h(n))$; O mesmo vale substituindo O por Ω;
6. $f(n) = O(g(n) + h(n))$ se e somente se $f(n) = O(g(n)) + O(h(n))$; O mesmo vale substituindo O por Ω ou por Θ;
7. Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$, entao $f(n) = O(h(n))$; O mesmo vale substituindo O por Ω ou por Θ.

Complexidade do InsertionSort

- A complexidade do InstertionSort é:

Melhor caso	**Caso médio**	**Pior caso**
$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$

Complexidade do InsertionSort

- Relembre que, no melhor caso

$$T(n) = 5n - 3$$

- De acordo com as propriedades 1 e 2, temos que:

$$T(n) = 5n - 3 = \Theta(n)$$

Complexidade do InsertionSort

- Relembre que, no pior caso
$$T(n) = n^2 + 2n - 6$$
- Podemos provar como fizemos anteriormente (encontrar c e n_0), mas obserse que, para qualquer $T(n)$ na forma:
$$T(n) = an^2 + bn + c$$

  se tomarmos $n_0 = 1$ e notar que para todo $n \geq n_0$ temos que
$$an^2 \leq an^2 + bn + c \leq (a + b + c)n^2$$

  escolhendo $c = a$ e $C = a + b + c$ na definição de O e Ω (por consequencia Θ), temos que
$$T(n) = n^2 + 2n - 6 = \Theta(n^2)$$

Função assintótica de polinômios

- Com uma análise similiar, podemos mostrar que para qualquer polinômio

$$T(n) = \sum_{i=1}^{k} a^i n^i$$

em que a_i é uma constante para $i \in 1..k$, e $a_k > 0$, temos que

$$T(n) = \Theta(a^k)$$

Complexidade do InsertionSort

- Relembre que, no caso médio

$$T(n) = 2n + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n^2}{4} + \frac{7n}{4}$$

que é similar ao caso anterior, portanto

$$T(n) = 2n + \frac{n(n-1)}{4} = \Theta(n^2)$$

Complexidade do InsertionSort

- Na prática, como estamos interessados no comportamento assintótico, não precisamos fazer uma análise tão cuidadosa como a que fizemos no início da aula.
  - Por exemplo, não precisamos contar as linas 2,3,7 e 5,6, pois "o que importa" é número de repetições do laço
- Essa é uma das vantagens de se utilizar notação assintótica para estimar os recursos de um algoritmo

Complexidade

- Em geral, quando falamos da complexidade de um algoritmo, estamos interessados no pior caso
  - nem sempre é fácil definir um "caso médio"
- Qual é o limite superior do pior caso desse algoritmo?

Complexidade do InsertionSort

- É possível fazer melhor?
  - Sim, mas veremos nas próximas aulas 😀