Análise de Algoritmos

Ronaldo Cristiano Prati

Bloco A, sala 513-2

ronaldo.prati@ufabc.edu.br

Lidando com problemas intratáveis

- Suponha que você se depare com um problema NP-Difícil
- A teoria nos diz que é imporvável encontrar um algoritmo polinomial para o problema
- Devemos desistir?
  - Provavelmente sim, se o objetivo for realmente encontrar um algoritmo polinomial
  - Provavelmente não, se o seu trabalho depende disso

Lidando com problemas intratáveis

- Melhorando com relação a força bruta
  - Desenvolver estatégias que identificam e armazenam soluções já calculadas (programação dinâmica).
  - Garantia de encontrar a solução ótima,
  - Sem garantia de tempo polinomial
- Heurísticas
  - Desenvolver algoritmos intuitivos
  - Garantia de execução em tempo polinonimal
  - Sem garantia de qualidade da solução

Lidando com problemas intratáveis

- Algoritmos aproximados
  - Garantia de execução em tempo polinomial
  - Garantia de encontrar uma solução de alta qualidade (digamos, 95% do ótimo)
  - Problema: temos que mostrar que uma solução está próxima do ótimo, mesmo sem saber qual é o valor ótimo!

Mochila inteira

- Resolver o problema da mochila por força bruta tem complexidade $O(n2^n)$, pois existem $O(2^n)$ combinações e levamos um tempo $O(n)$ para verificar cada uma
- Quando estávamos estudando programação dinâmica, vimos um algoritmo para resolver o problema da mochila
- Essa abordagem tem complexidade $O(n2^{\log W})$, em que W é o tamanho da mochila

Mochila inteira

- E se usarmos a estratégia gulosa da mochila fracionária para a mochila inteira?

  1. Ordenar e reindexar os itens tal que
  $$\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_1}{w_1} \ldots \geq \frac{v_n}{w_n}$$
  2. Passo:2 Selecionar os itens em ordem até que algum não caiba, e paramos

Mochila inteira

- Considere uma mochila com capacidade $W = 5$, e a seguinte lista de itens:

item	valor	peso
1	2	1
2	4	3
3	3	3

- Nesse caso, o algoritmo guloso seleciona os itens $\{1, 2\}$, que nesse exemplo é a mesma da solução ótima

Mochila inteira

- Considere uma mochila com capacidade $W = 1000$, e a seguinte lista de itens:

item	valor	peso
1	2	1
2	1000	1000

- Nesse caso, o algoritmo guloso seleciona apenas o item $\{1\}$, que neste caso está muito distante da solução ótima!

Mochila inteira

- Uma heurística melhorada que a anterior é:
  1. Ordenar e reindexar os itens tal que
  $$\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_1}{w_1} \ldots \geq \frac{v_n}{w_n}$$
  2. Selecionar os itens em ordem até que algum não caiba, e paramos
  3. retornar o máximo entre o passo 2 ou o item de maior valor

Garantia de desempenho

- Teorema: o algoritmo guloso de 3 passos encontra uma solução que sempre é maior que 50% da solução ótima.
- Prova: no passo 2, suponha que o algoritmo seleciona os primeiros k itens, ordenados pela razão valor/peso.
  - Seja $c(S)$ o valor da solução do algoritmo de 3 passos
  - Seja $c(S_k)$ o valor da solução de selecionar os primeiros k itens
  - Seja v_{k+1} o valor do item $k+1$

Garantia de desempenho

- Como no passo 3 pegamos o máximo entre os k primeiros itens que cabem na mochile ou os itens remanescentes, temos que

$$c(S) \geq c(S_k) \tag{1}$$

$$c(S) \geq v_{k+1} \tag{2}$$

- Combinando (1) e (2), temos que

$$2c(S) \geq c(S_{k+1}) \tag{3}$$

Garantia de desempenho

- O item $k+1$ não cabe na mochila, mas vamos assumir que podemos selecionar uma fração dele (como na mochila fracionária)
- Seja $c(S'_{k+1})$ o valor dessa mochila fracionária hipotética, e S^* o valor da solução ótima
- Na mochila fracionária preenchemos a mochila **completamente** e de maneira ótima, então a solução gulosa da mochila fracionária deve ser maior ou igual ao da solução ótima inteira

Garantia de desempenho

- Resumindo:

$$2c(S) \geq c(S_{k+1}) \qquad (3)$$

$$c(S'_{k+1}) \geq c(S^*) \qquad (4)$$

- Combinando (3) e (4), temos que

$$2c(S) \geq c(S^*)$$

$$c(S) \geq \frac{c(S^*)}{2}$$

o que prova o teorema

Aproximação arbitrariamente boa

- **Objetivo:** para um parametro ϵ especificado pelo usuário, queremos garantir $(1 - \epsilon)\%$ de aproximação
- **Limitação:** o tempo de execução aumenta a medida que ϵ diminui. (estamos trocando tempo computacional por garantia de qualidade)

Aproximação arbitrariamente boa

- **Ideia em alto nível**: resolver de maneira exata um problema aproximado, mas que é mais fácil de resolver
- Para o problema da mochila, podemos arredondar o valor dos itens para um inteiro pequeno.
- Existe uma varição do algoritmo que executa em $O(n^2 V_{\max})$, em que $V_{\max} = \max v_i$

Aproximação arbitrariamente boa

- Por exemplo considere uma mochila com capacidade $W = 11$. O valor original na tabela da esquerda pode ser aproximado pelos valores da tabela da direita

item	valor	peso
1	134.221	1
2	656.342	2
3	1.810.013	5
4	22.217.800	6
5	28.343.199	7

item	valor	peso
1	1	1
2	6	2
3	18	5
4	222	6
5	283	7

Aproximação arbitrariamente boa

- Arredondar os valores, dividindo por um parâmetro θ :

$$\hat{v_i} = \left\lfloor \frac{v_i}{\theta} \right\rfloor$$

- Em que o parâmetro m é definido em função do parâmetro de qualidade ϵ especificado pelo usuário:

$$\theta = \frac{\epsilon \cdot V_{\max}}{n}$$

Duas abordagnes para a mochila inteira

- Na primeira versão do algoritmo de programação dinâmica,

> *Qual é o valor **máximo** que conseguimos colocar no **espaço W**, considerando os **primeiros** $n-1$ **itens**.*

- Uma maneira diferente de abordar o problema é

> *Qual é o **espaço mínimo** necessário para obter **valor X** com os primeiros **primeiros** $n-1$ **itens***

Duas abordagnes para a mochila inteira

- Na primeira versão do algoritmo de programação dinâmica, temos a relação de recorrência

$$V_{n,W} = \begin{cases} \max\{V_{n-1,W}, V_{n-1,W-w_n} + v_n\} & \text{se } w_n \leq W \\ V_{n-1,W} & \text{se } w_n > W \end{cases}$$

- Na segunda versão, temos:

$$V_{n,W} = \begin{cases} \min\{V_{n-1,X}, V_{n-1,X-v_n} + w_n\} & \text{se } v_n \leq X \\ V_{n-1,X} & \text{se } v_n > X \end{cases}$$

Comparando algoritmos

- Força Bruta: $O(n2^n)$
- Primeiro algoritmo de programação dinâmica $O(nW) = O(n2^{\log W})$
- Segundo algoritmo de programação dinâmica $O(nV) = O(n2^{\log V})$
- Casos especiais:
  - Podemos usar o primeiro algoritmo se a capacidade da mochila é pequena e fixada
  - Podemos usar o segundo algoritmo se o valor total é fixado

Aproximação arbitrariamente boa

- Para uma solução S, seja $c(S)$ o valor da solução no problema original, e $c'(S)$ o valor da solução do problema aproximado.
- Seja S^* a solução ótima no problema original, e S'^* a solução ótima no problema simplificado
- Queremos achar um limite para

$$c(S^*) - \theta c'(S'^*)$$

- O valor da soluçõa ótimos é $c(S*)$, e nossa aproximação retorna $\theta c'(S'^*)$

Aproximação arbitrariamente boa

- Observe que
  $c'(S'^*) \geq c'(S^*)$
  - Raciocínio: S'^* é a solução ótima para o problema reduzido, então o seu valor no problema reduzido é pelo menos o valor de qualquer solução de qualquer solução no problema reduzido, incluindo S^*
- Então

$$c(S^*) - \theta c'(S'^*) \leq c(S^*) - \theta c'(S^*)$$

Aproximação arbitrariamente boa

- Agora observe que:

$$
\begin{aligned}
c\left(S^*\right) - \theta c'\left(S^*\right) &= \sum_{i \in S^*} v_i - \theta \sum_{i \in S^*} \left\lfloor \frac{v_i}{\theta} \right\rfloor \\
&= \sum_{i \in S^*} \left(v_i - \theta \left\lfloor \frac{v_i}{\theta} \right\rfloor \right) \\
&< \sum_{i \in S^*} \theta \\
&= n\theta
\end{aligned}
$$

Então $c(S^*) - \theta c'(S^*) \leq n\theta$

Aproximação arbitrariamente boa

- Substituindo, temo que:

$$c(S^*) - \theta c'(S'^*) \leq n\theta$$

$$c(S^*) - n\theta \leq \theta c'(S'^*)$$

- Se $n\theta \leq \epsilon c(S^*)$, então $(1-\epsilon)c(S^*) \leq c'(S'^*)$, então temos que escolher $\theta \leq \frac{\epsilon c(S^*)}{n}$
- Um limite inferior para $c(S^*)$ é o item de maior valor V_{max} que cabe na mochila. Então podemos escolher

$$\theta \leq \frac{\epsilon V_{\max}}{n}$$

Aproximação arbitrariamente boa

- Para qualquer θ, o tempo de execução é $O(nV/\theta)$
- Já que $\theta = \frac{\epsilon V_{\max}}{n}$, o tempo de execução é $O\left(n^2 \frac{V}{\epsilon V_{\max}}\right)$
- Observe que $V \leq nV_{\max}$, então o tempo de execução é $O\left(\frac{n^3}{\epsilon}\right)$
- Um esquema de aproximação completamente em tempo polinomal (**FPTAS** - do inglês Fully Polinomial-Time Approximation Scheme) é um esquema de aproximação em que o tempo é polinomial no tamanho da entrada e $1/\epsilon$

FPTAS

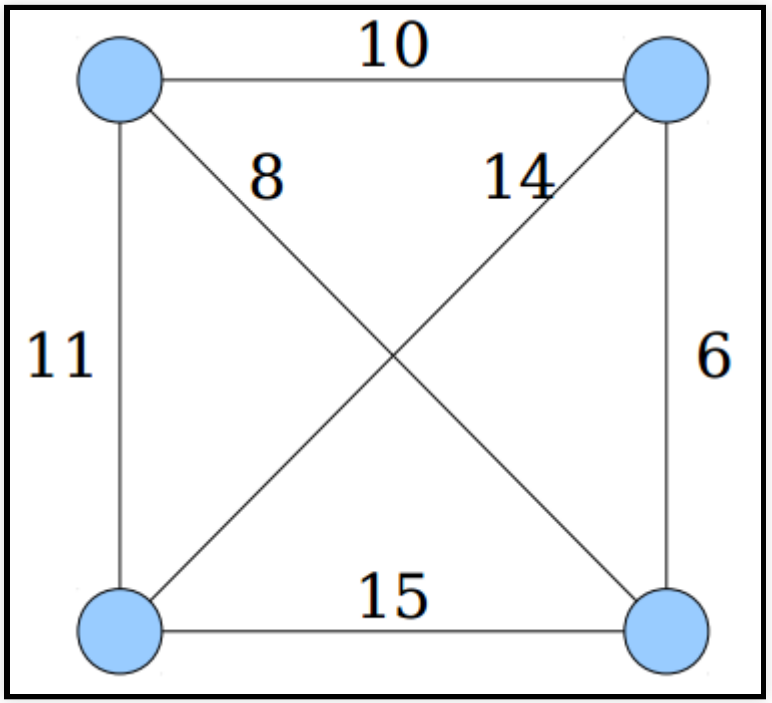
- Alguns (mas não todos) algoritmos NP-difíceis podem ser aproximados usando FPTAS
- Mesmo que $P \neq NP$, ainda assim podemos aproximar a resposta para uma precisão arbitrária em tempo polinomial
- Se você optar por uma solução aproximada, em muitos casos você existem algoritmos eficientes

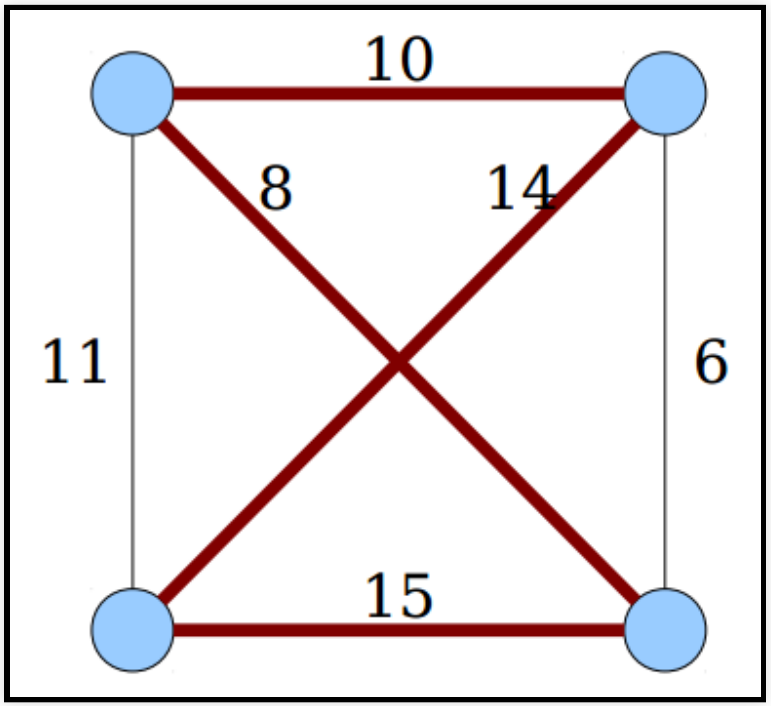
Problema do caixeiro viajante

- Um **Ciclo Hamiltoniano** em um grafo não dirigido G é um ciclo simples que visita todos os nós de G

Problema do caixeiro viajante

- Dado um grafo G completo e não dirigido, o problema do caixeiro viajante (TSP, do inglês Traveling Salesperson Problem) consiste em encontra o ciclo Hamiltoniano de custo mínimo

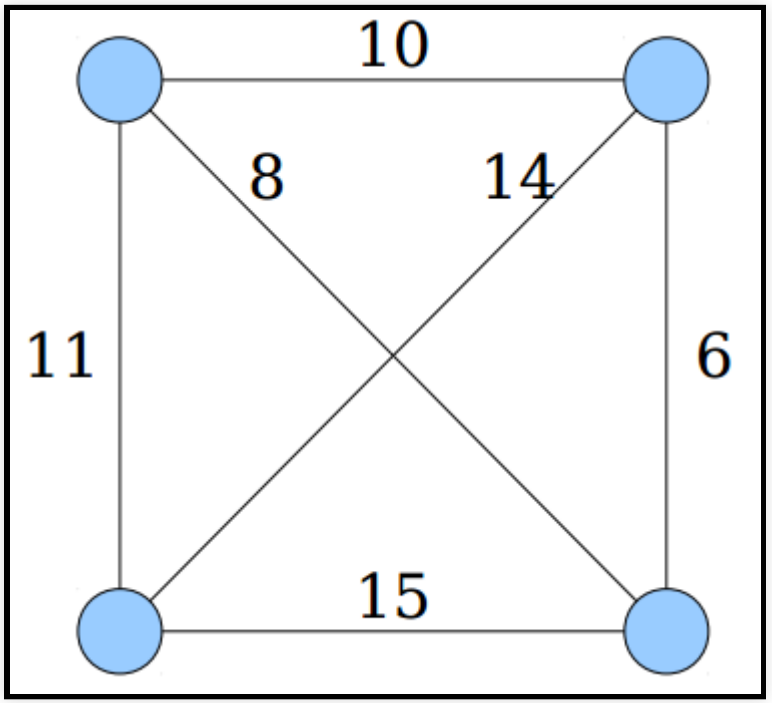


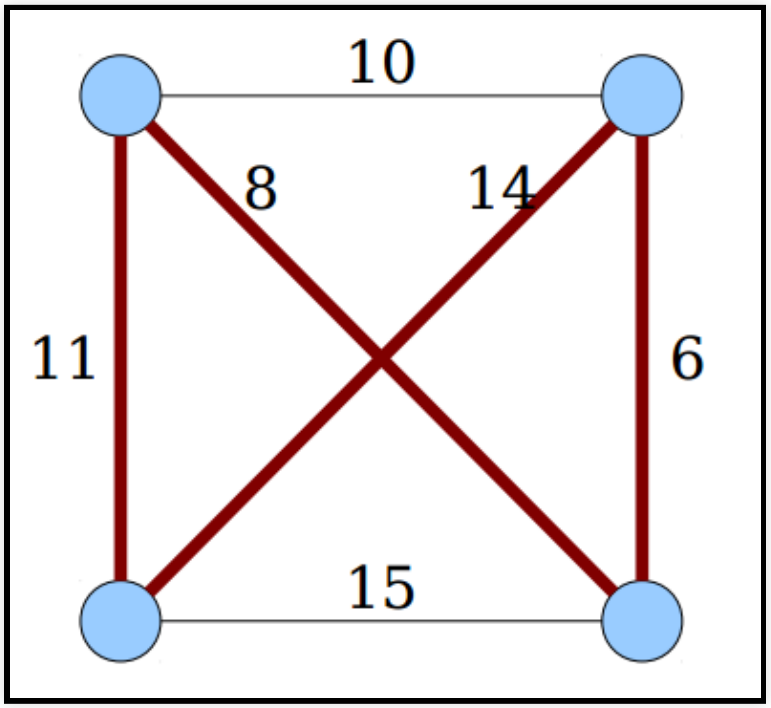


Custo 47

Problema do caixeiro viajante

- Dado um grafo G completo e não dirigido, o problema do caixeiro viajante (TSP, do inglês Traveling Salesperson Problem) consiste em encontra o ciclo Hamiltoniano de custo mínimo





Custo 39

Problema do caixeiro viajante

- Dado um grafo G completo e não dirigido, o problema do caixeiro viajante (TSP, do inglês Traveling Salesperson Problem) consiste em encontra o ciclo Hamiltoniano de custo mínimo
- Observe que se o grafo é completo, deve existir pelo menos um ciclo Hamiltoniano
- Esse problema é conhecido como sendo NP-Difícil

Problema do caixeiro viajante

- Uma solução por força bruta consiste em testar todos os ciclos Hamiltonianos
  - Quantos ciclos Hamiltonianos existem?
    Resposta: $(n-1)!/2$
  - Cosumimos $O(n)$ para processar cada ciclo
- Tempo total: $O(n!)$
- O que é completamente impraticável

Problema do caixeiro viajante

- Seja $C(v, S)$ o custo mínimo de um caminho $\{1, 2, \cdots, v\}$ que o último vértice é v, e passa por todos os vértices de G
- Seja u o penúltimo vértice desse caminho, e $w(u, v)$ o custo da aresta (u, v). Devemos usar (u, v) se o caminho $\{1, 2, \cdots, u\}$ é ótimo, mais o custo $w(u, v)$, levando a seguinte equação de recorrência:

$$Cv, S = \begin{cases} \min_{u \in S \setminus v} \{C(u, S \setminus v) + w(u, v)\} & \text{se } w_n \leq W \\ 0 & \text{se } v = s \text{ e } S = \{s\} \end{cases}$$

Problema do caixeiro viajante

- Podemos usar programação dinâmica para armazear os subconjuntos de vértices já calculadas
- A ideia consiste em avaliar a equção de recorrência em conjuntos de tamanho crescente $(1, 2, \cdots, n)$
- Existe $O(2^n)$ possíveis permutações de S.
- Podemos mapear cada subconjunto em um número inteiro usando uma máscara binária. Isso leva a um custo adicional de $O(n)$ para calcular a máscara que não contenha v.

Problema do caixeiro viajante

- Em resumo, temos $O(n2^n)$ subproblemas
- Resolver um subproblema de tamanho n requer que analisemos $O(n)$ subproblemas, com um custo adicinal de $O(1)$ para cada
- O custo da abordagem de programação dinâmica é $O(n^2 2^n)$

Problema do caixeiro viajante

- Ainda é exponencial, mas compare o tempo para diferente entradas:

tamanho	**força bruta**	**programação dinâmica**
20	$20! \approx 2.4 \times 10^{18}$	$2^{20}20^2 \approx 4.2 \times 10^{8}$
30	$30! \approx 2.6 \times 10^{32}$	$2^{30}30^2 \approx 9.7 \times 10^{11}$
40	$40! \approx 8.2 \times 10^{47}$	$2^{40}40^2 \approx 1.8 \times 10^{15}$

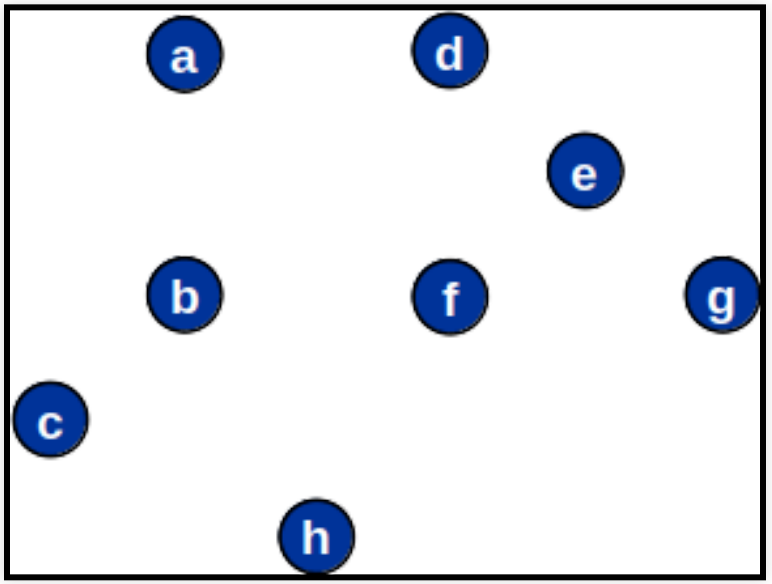
- Melhorar com relação à força bruta aumenta o tamanho dos problemas que conseguimos resolver em um tempo razoável

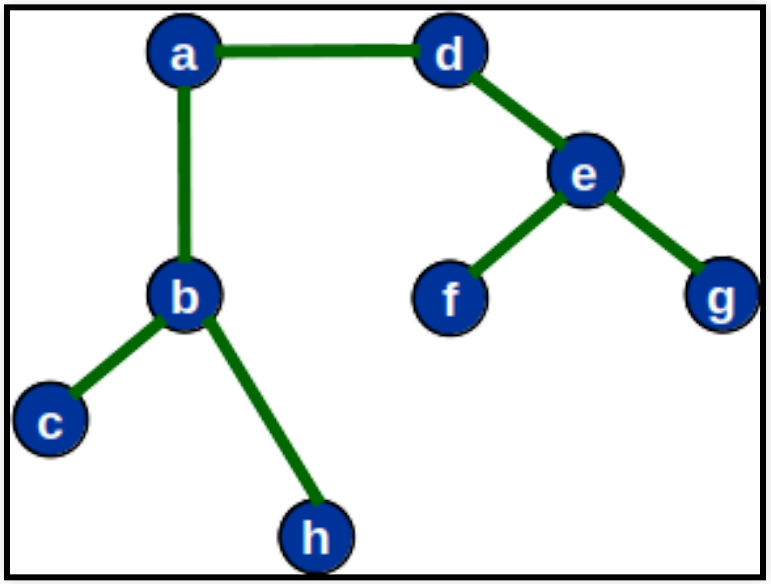
Problema do caixeiro viajante

- Provavelmente não é possível encontrar uma aproximação para o TSP com garantia ϵ e tempo polinomial
- Se relaxarmos o problema para desconsiderar os pesos, reduziriamos o problema a encontra um ciclo Hamiltoniano qualquer, que também não tem uma solução polinomial

Heurísticas

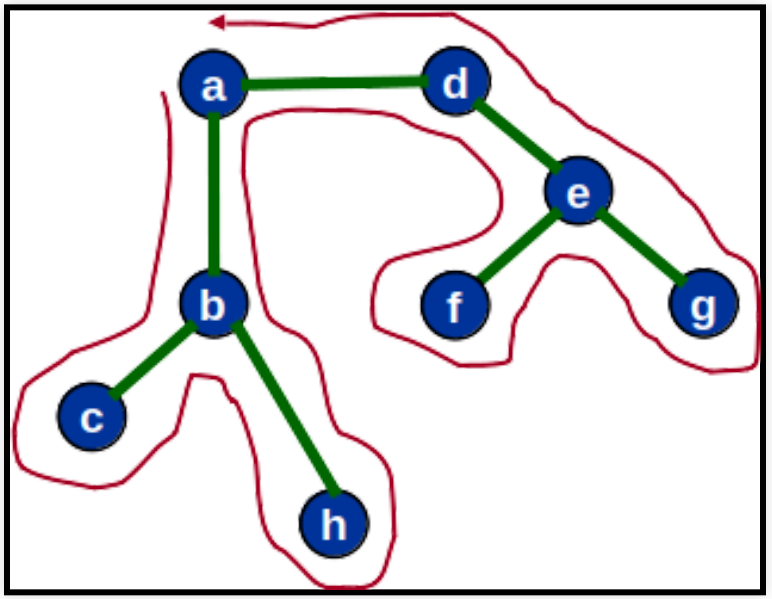
- Uma heurística para resolver o TSP consiste em encontrar a árvore geradora mínima (TSP)

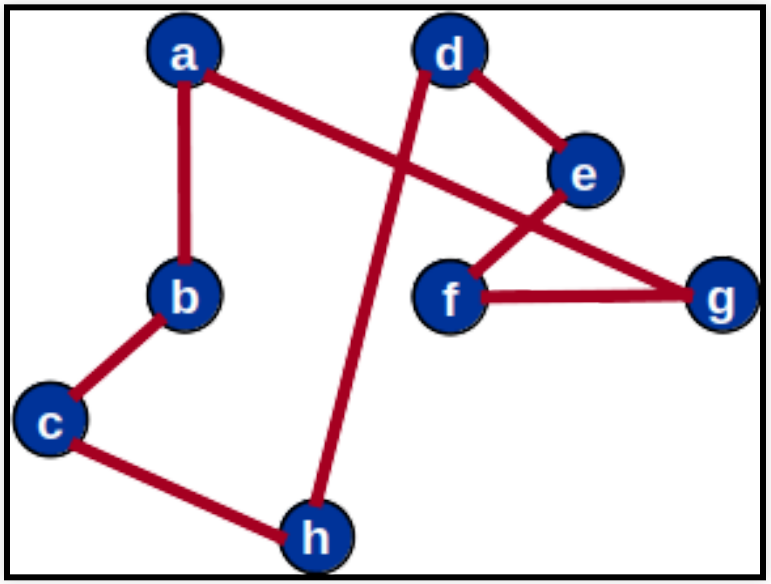




Heurísticas

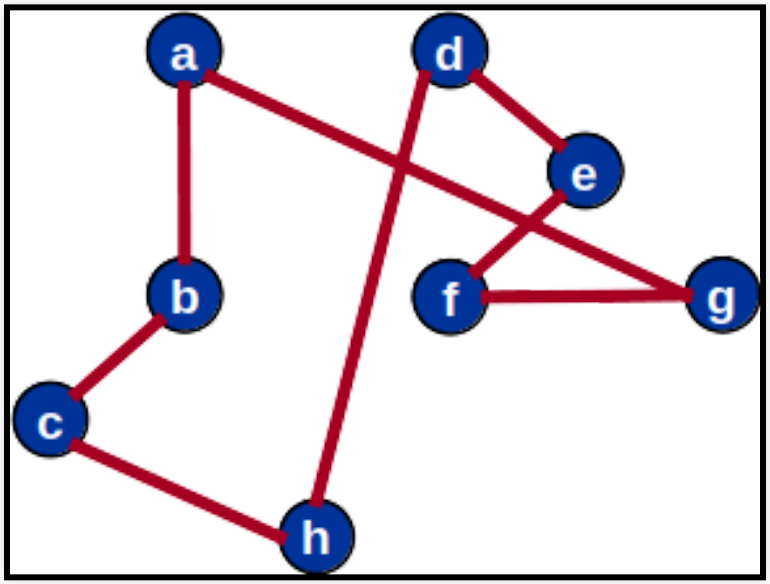
- Uma heurística para resolver o TSP consiste em encontrar a árvore geradora mínima (TSP)
- Retornar o ciclo no pecurso em ordem da árvore

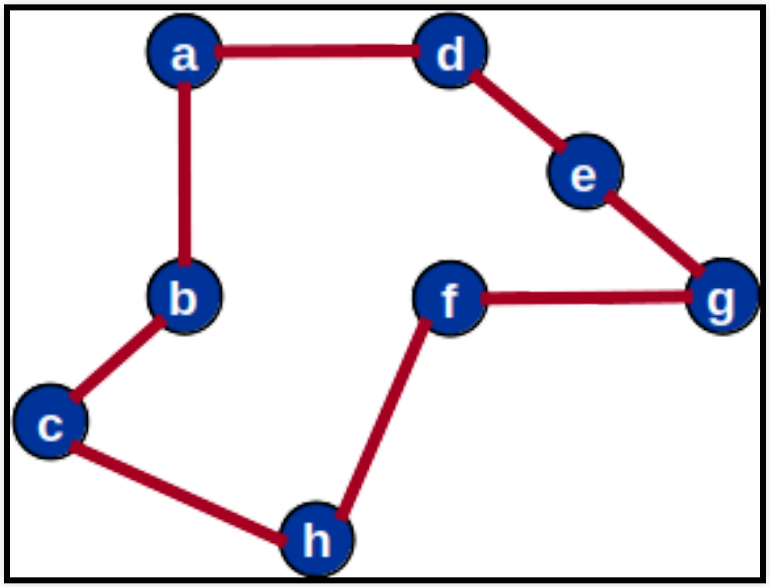




Heurísticas

- Uma heurística para resolver o TSP consiste em encontrar a árvore geradora mínima (TSP)
- Retornar o ciclo no pecurso em ordem da árvore





Ciclo Hamiltoniano a partir da MST

Solução ótima para o TSP

Heurísticas

- Assumindo que a distância entre os nós respeita a distância euclideana, podemos encontrar um PTAS para o TSP euclideado:
  - Uma aproximação cuja distância é no máximo duas vezes a do caminho ótimo pode ser encontrara em tempo polinomial usando o algoritmo de dobrar a árvore
  - No máximo 1,5 vezes a do caminho ótimo pode ser encontrada utilizando o algoritmo de Christofides

Lidando com problemas intratáveis

- Em resumo
  - Se precisa de uma solução exata, em geral podemos fazer melhor que força bruta (mas ainda em tempo não polinomial)
  - Se uma aproximação é suficiente, algumas vezes podemos encontrar algoritmos eficientes com garantia de proximidade.