Análise de Algoritmos

Ronaldo Cristiano Prati

Bloco A, sala 513-2

ronaldo.prati@ufabc.edu.br

Complexidade do InsertionSort

(recapitulando)

- A complexidade do InstertionSort é:

Melhor caso	Caso médio	Pior caso
$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$

- O InsertionSorte é um algoritmo que ordena qualquer vetor de n elements em $O(n)$.
  - Não podemos dizer que InsertionSorte é $\Theta(n^2)$ pois no melhor caso o algoritmo executa em $\Theta(n)$.
- Podemos fazer melhor?

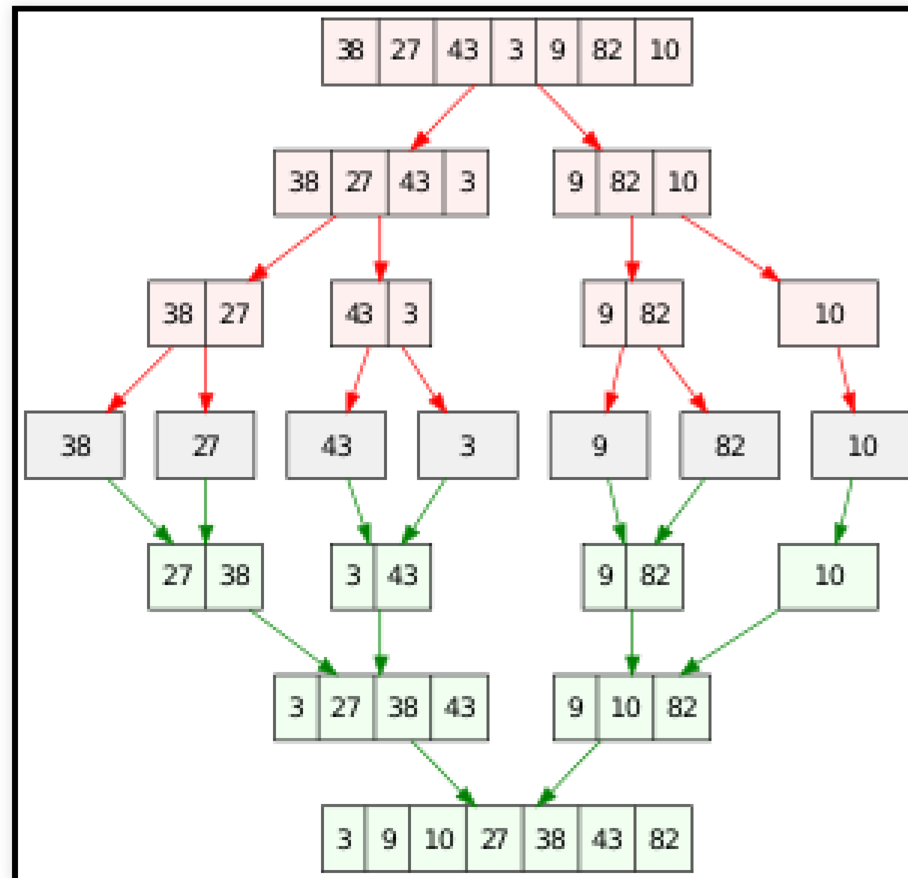
Divisão e Conquista

- Nós vamos usar um princípio parecido com o utilizado no algoritmo de Karatsuba de multiplicação de inteiros:
  - Recursivamente dividir um problema grande em problemas menores (divisão)
  - Resolver o problema menor (caso base)
  - Combinar as soluções parciais para resolver o problema maior (conquista)

Merge Sort

- A ideia do Merge Sort é dividor o problema em problemas menores, que podem ser mais facilmente resolvidos
  - divida os elementos em 2 sub-vetores de tamanho (aproximadamente) $n/2$;
  - ordene cada sub-vetor (recursivamente)
  - intercale pares de sub-vetores adjacentes, em ordem
- A ordenação de cada sub-vetor é feita por meio de uma chamada recursiva em cada sub-vetor, até que cada sub-vetor tenha apenas um elemento (naturalmente ordenado)

Merge Sort



Merge Sort

6 5 3 1 8 7 2 4

Merge Sort

- No método recursivo, passamos os limites (início, fim), do pedaço do vetor que estamos ordenando
- Se esses limites forem **iguais**, não precisa fazer nada (só tem um elemento, então é naturalmente ordenado)
- Caso contrário, "dividimos" o vetor em 2, e fazemos uma chamada recursiva para ordenar cada metade.
- Após o final dessas chamadas, fazemos a combinação usando a função Combina

Merge Sort

- A função recursiva MegerSort

Algoritmo 29: MERGESORT(A, $inicio$, fim)

1 **se** $inicio < fim$ **então**
2   $meio = \lfloor (inicio + fim)/2 \rfloor$
3   MERGESORT(A, $inicio$, $meio$)
4   MERGESORT(A, $meio + 1$, fim)
5   COMBINA(A, $inicio$, $meio$, fim)

(retirado daqui)

Combinação (Merge)

- Temos dois vetores **ordenados**, cada uma com o menor valor na primeira posição. Aquela que tiver o menor valor será o primeiro elemento no vetor intercalado.
- Uma vez que o menor valor é removido, examine novamente o primeiro elemento de cada vetor. Aquele que for menor será o próximo item no vetor intercalado.
- Continue esse processo de pegar o menor elemento do início de cada vetor até que você chegue ao fim de um vetor. Os remanecentes do outro vetor podem ser diretamente copiados para o vetor final

Função Combina

Algoritmo 30: COMBINA(A, $inicio$, $meio$, fim)

```
1  n1 = meio − inicio + 1
2  n2 = fim − meio
3  Crie vetores auxiliares B[1..n1] e C[1..n2]
4  para i = 1 até n1 faça
5  │  B[i] = A[inicio + i − 1]
6  para j = 1 até n2 faça
7  │  C[j] = A[meio + j]
8  i = 1
9  j = 1
10 k = inicio
11 enquanto i < n1 e j < n2 faça
12 │  se B[i] ≤ C[j] então
13 │  │  A[k] = B[i]
14 │  │  i = i + 1
15 │  senão
16 │  │  A[k] = C[j]
17 │  │  j = j + 1
18 │  k = k + 1
19 enquanto i < n1 faça
20 │  A[k] = B[i]
21 │  i = i + 1
22 │  k = k + 1
23 enquanto j < n2 faça
24 │  A[k] = C[j]
25 │  j = j + 1
26 │  k = k + 1
```

(retirado daqui)

Análise do MergeSort

- Vamos reponder as três perguntas com relação a análise de algoritmos:
  1. O algoritmo está **correto**?
  2. Quantos **recursos** o algoritmo consome?
  3. É possível fazer **melhor**?

O Algoritmo está correto?

- Hipótese de indução: "Em cada passo da chamada recursiva em um vetor de tamanho no máximo i, MergeSort retorna um vetor ordenado"
- Caso Base ($i = 1$): um vetor de 1 elemento está sempre ordenado
- Passo de indução: Precisa provar que o método Combina mantém o vetor ordenado após a sua execução
- Conclusão: Ao final da execução, Combina junta todos os sub-vetores em um vetor ordenado.

(exercício): estude a prova por indução de na Seção 2.3.1 do livro do Cormen!

Complexidade do MergeSort

- Observe que o MergeSort requer memória extra na mesma proporção que o vetor original ($\Theta(n)$)
- Qual é a complexidade de tempo de MergeSort?
  - No caso base, o algoritmo executa uma tarefa que é $\Theta(1)$
  - Caso contrário, o tempo gasto será o tempo de ordenar cada uma das metades, mais o tempo de fazer a combinação

Complexidade do MergeSort

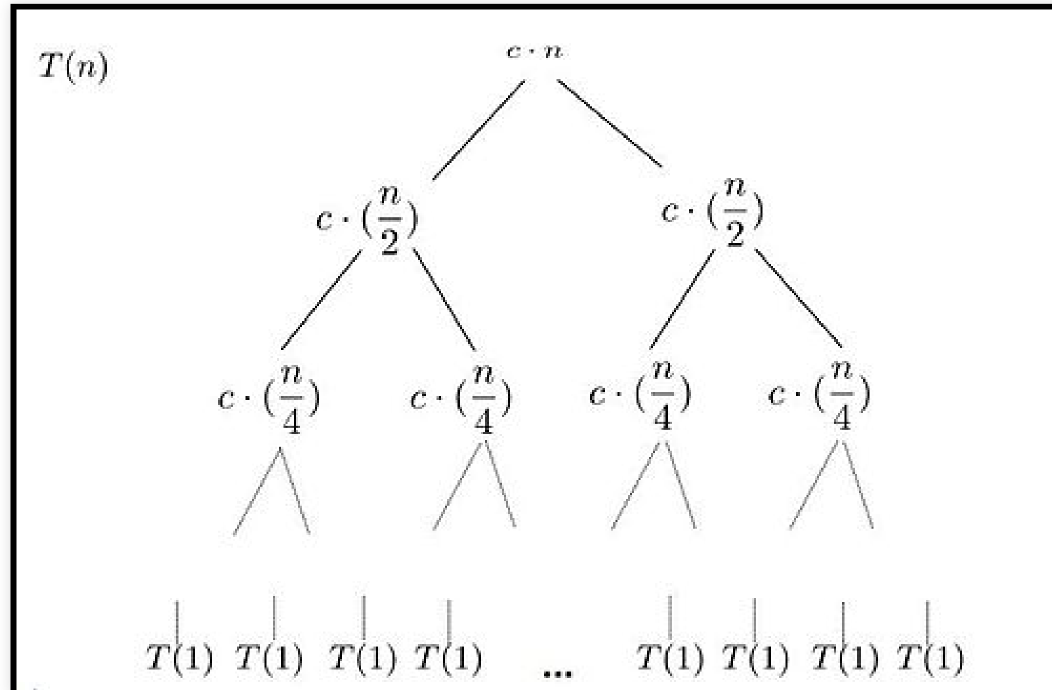
- Seja $n = fim - inicio$
- Na etapa de combinação, temos que combinar dois (sub) vetores de tamanho $n_1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $n_2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- É fácil verificar que Combina consome $\Theta(n)$ operações:
  - Os laços das linhas 4 e 6 executam $T(n) = n_1 + n_2 = \Theta(n)$
  - De manira similar, os laços das linhas 11, 19 e 23 também são executados $T(n) = n_1 + n_2 = \Theta(n)$ (é fácil ver isso observado os valores que k assume)

Equação de recorrência

- Podemos escrever a equação do tempo $T(n)$ gasto pelo MergeSort utilizando uma Equação a recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{se } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n), & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Equação de recorrência



”Desenrolando” a quação de recorrência

- Para facilitar as contas, vamos assumir que n é uma potência de 2, ou seja $n = 2^k$ (como estamos considerando análise assintótica, podemos imaginar que estamos arredondanto para cima caso não seja)

$$\begin{aligned}
T(2^k) &= 2T(2^{k-1}) + 2^k \\
&= 2^2T(2^{k-2}) + 2^1 2^{k-1} + 2^k \\
&= 2^3T(2^{k-3}) + 2^2 2^{k-2} + 2^1 2^{k-1} + 2^k \\
&= 2^kT(1) + 2^{k-1}2^1 + ... + 2^1 2^{k-1} + 2^k \\
&= 2^k + 2^{k-1}2^1 + ... + 2^1 2^{k-1} + 2^k \\
&= (k+1)2^k \\
&= k2^k + 2^k
\end{aligned}$$

”Desenrolando” a quação de recorrência

- Como $2^k = n$, podemos reescrever
$$T(n) = n \log n + n$$
$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

- Portanto, a complexidade do MergeSort é $\Theta(n \log n)$

Podemos fazer melhor?

- Existe um algoritmo de ordenação de vetores com complexidade menor que $\Theta(n \log n)$?
- Existe um limite inferior de complexidade de métodos de ordenação?

Limite inferior

Teorema: O limite inferior de complexidade para algoritmos baseados em comparação direta dos elementos é $\Omega(n \log n)$

Limite inferior

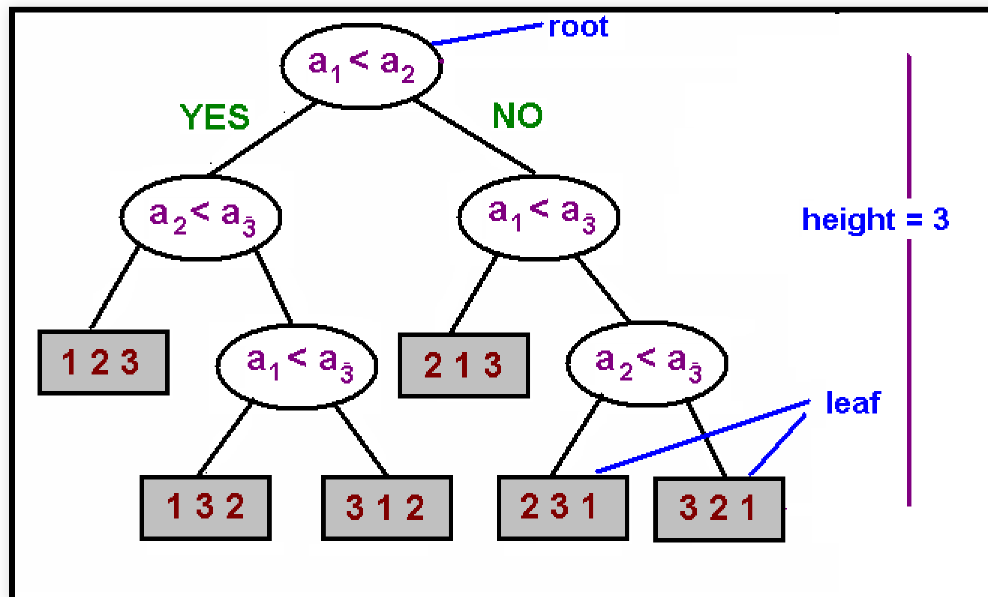
- Para uma vetor A de n elementos, existem $n!$ possíveis permutações de posições entre eles
- Um algoritmo que considera todas as possíveis permutações teria uma complexidade $O(n!)$

Árvore de decisão

- Podemos usar comparações entre elementos para organizar essa permutações, de maneira a não considerar todas elas na ordenação.
- Essa organização forma uma árvore de decisão:
  - Cada nó da árvore contém uma comparação entre dois elementos. De um lado, colocamos as permutações em que a comparação é verdadeira, e de outra as permutações são falsas
  - Nas folhas, deve haver apenas permutações únicas

Árvore de decisão

- Para o caso de $n = 3$, e $A = [1, 2, 3]$, teríamos por exemplo:



Árvore de decisão

- Uma árvore como essa pode ser usada por um algoritmo de ordenação para encontrar a permutação ordenada sem considerar todas as possíveis permutações.
- O algoritmo percorre um ramo da árvore da raíz até uma folha, fazendo as comparações indicadas nos nós.
- O número máximo de comparações (pior caso) é equivalente a altura máxima da árvore.

Limite inferior

- Seja m o número de permutações em um determinado nó da árvore. O algoritmo ideal de ordenação divide o número de permutações em duas partes de tamanho $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ e $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$
  - Como uma comparação pode quebrar o problema em dois menores, idealmente queremos dividir o problema grande em dois menores de tamanho equivalente
- Qual é a altura máxima da árvore de um algoritmo de ordenação ideal?

Limite inferior

- Para facilitar a análise, vamos considerar que o n é uma potência de 2 (caso não seja, podemos considerar o primeiro inteiro potência de 2 que é maior que n)
- Seja h a altura da árvore do algoritmo ideal. Nesse caso, o número máximo de comparações é 2^h. Temos que:

$$\begin{aligned} 2^h &\geq n! \\ h &\geq \log n! \\ h &\geq n \log n \\ h &= \Omega(n \log n) \end{aligned}$$

Limite inferior

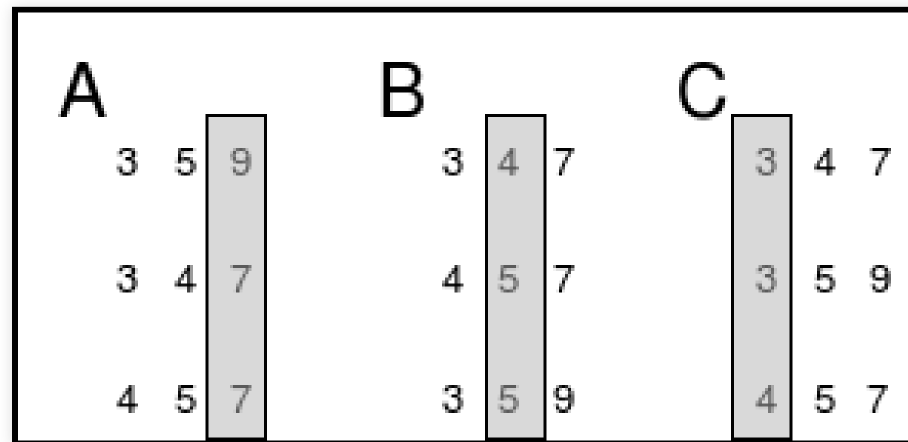
- Em outras palavras, o número mínimo que comparações que um algoritmo de ordenação deve realizar para ordenar qualquer vetor de n elementos é $\Omega(n \log n)$
- O MegerSort realiza $\Theta(n \log n)$ comparações, portanto o MergerSort pode ser considerado um algortimo cuja complexidade assintótica é ótima!

Ordenação linear

- Apesar desse limite $\Omega(n \log n)$ para algoritmos baseados em comparações, existem algoritmos com uma ordem de complexidade mais baixa, mas precisamos fazer suposições adicionais sobre os itens a serem ordenados
- Um exemplo é o Radix Sort

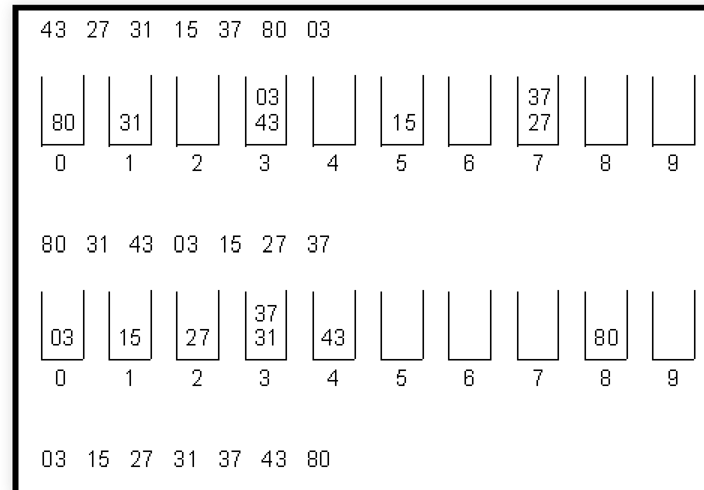
Radix Sort

- Radix Sort ordena cada "posição" do elemneto individualmente.
- Refaz o processo para cada dígito



Radix Sort

- Podemos usar o fato de que o número de valores que cada dígito pode assumir é fixo para realizar cada passagem de maneira eficiente.



Radix Sort

- Por exemplo, considere que queremos ordenar o Código de Endereçamento Postal (CEP), que no brasil tem os 8 dígitos, começando do menos significativo, depois o segundo, e assim por diante, até oredenar os 8 dígitos
- Como sabemos quantos valores cada posição pode assumir (0 a 9), na ordenação de um dígito podemos simplesmente ir agrupando os elementos de acordo com o seu valor (que consome tempo linear).
- Como o número de dígitos do CEP é fixo (uma constante), e cada um consome tempo linear, nessa aplicação o RadixSort consome tempo linear.

Limite inferior

- A análise anterior não contradiz o fato que existe uma cota inferior para o número de comparações para a ordenação de **quaisquer** vetores
- Usamos o fato que, para um problema em particular, é possível usar a informação que os elementos tem um certo número de dígitos (8 no caso do CEP) para conseguir uma estratégia mais eficiente
- Outros algoritmos cujo tempo de ordenação é linear no número de elementos também fazem suposições sobre os elementos a serem ordenados.