Análise de Algoritmos

Ronaldo Cristiano Prati

Bloco A, sala 513-2

ronaldo.prati@ufabc.edu.br

Método mestre (simplificado)

(exemplo 1)

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

- $a = 9, b = 3, d = 1, a > b^d (9 > 3^1)$
- Caso 3
- Pelo teorema mestre, $T(n) = \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^2)$

Método mestre (simplificado)

(exemplo 2)

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$$

- $a = 1, b = 3/2, d = 0, a = b^d (1 = (3/2)^0)$
- Caso 1
- Pelo teorema mestre, $T(n) = \Theta(n^d \log(n)) = \Theta(n^0 \log n) = \Theta(\log n)$

Método mestre (simplificado)

(exemplo 3)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn^2$$

- $a = 2, b = 2, d = 2, a < b^d (2 > 2^2)$
- Caso 2
- Pelo teorema mestre, $T(n) = \Theta(n^d) = \Theta(n^2)$

Método mestre (simplificado)

(exemplo 4)

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + cn^2$$

- $a = 8, b = 2, d = 2, a > b^d (8 > 2^2)$
- Caso 3
- Pelo teorema mestre, $T(n) = \Theta(n^{\log_2 6}) = \Theta(n^3)$

Método mestre (geral)

(exemplo 5)

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$$

- $a = 3, b = 4, f(n) = n\log n$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$
- Além disso $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+\epsilon})$ e $af\left(\frac{n}{b}\right) = 3\frac{n}{4}\log\left(\frac{n}{4}\right) \leq \left(\frac{3}{4}\right)n\log n$
- Caso 3
- Pelo teorema mestre, $T(n) = \Theta(n\log(n))$

Método mestre (geral)

(exemplo 6)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$$

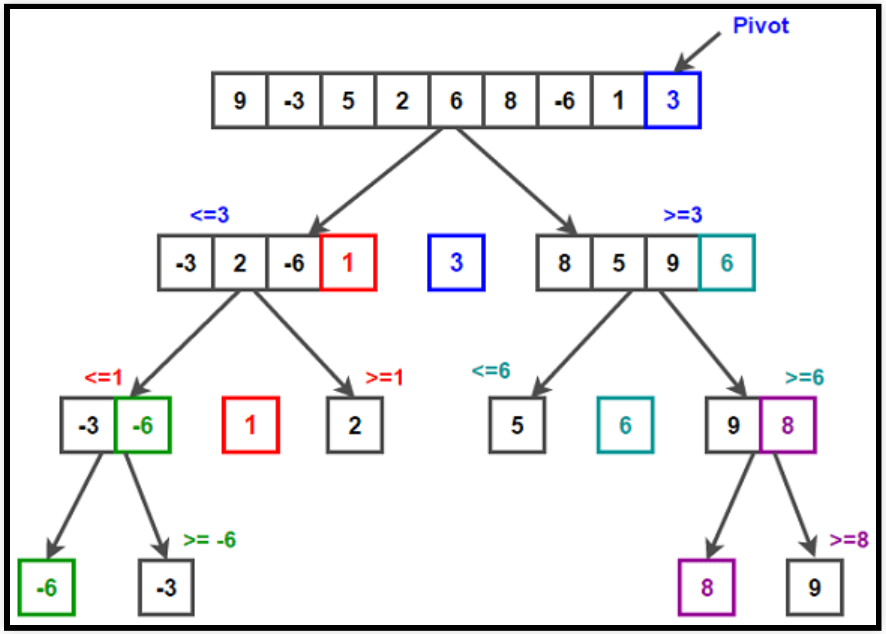
Quicksort

- Um dos algoritmos de ordenação mais usados na prática
- Não precisa de memória extra
- Pior caso $O(n^2)$, mas executa em $O(n \log n)$ no caso médio

Quicksort

- Ideia principal: particiona o vetor em torno de um elemento pivô.
- Usa um elemento do vetor como pivô
- Reorganiza o vetor de ta maneira que:
  - elementos à esquerda: menores que o pivô
  - elementos a direita: maiores que o pivô
- O pivô fica em sua posição correta

Quicksort



Quicksort

Algoritmo 35: QUICKSORT(A, $inicio$, fim)

```
1 se inicio < fim então
2     p = EscolhePivo(A, inicio, fim)
3     troque A[p] com A[fim]
4     x = Particiona(A, inicio, fim)
5     Quicksort(A, inicio, x − 1)
6     Quicksort(A, x + 1, fim)
```

Propriedades Subrotina Particiona

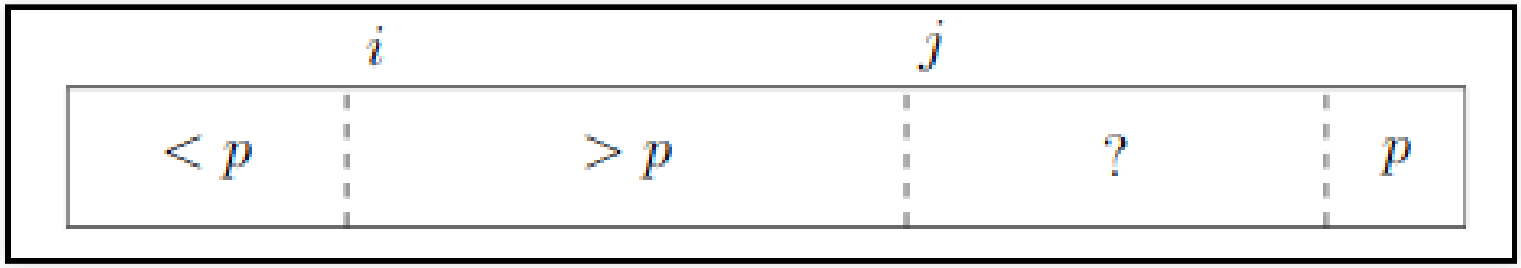
- Cada etapa de partição pode ser executada em tempo linear $O(n)$
- Não precisa de memória extra
- Reduz o tamanho de problema

Subrotina Particiona

- Assuma que o pivô é o último elemento do (sub)vetor
  - Se não for, troque o pivô com o último elmento
- Ideia (alto nível):
  - Faz uma passada pelo vetor
  - invariante: os elementos vistos até o momento já estão particionados

Subrotina Particiona

- Usa duas variáveis auxiliares
  - j: elementos vistos até o momento
  - i: elementos em $A[inicio..j]$ que são menores que o pivô



Subrotina Particiona

Subrotina Particiona

Algoritmo 36: PARTICIONA(A, $inicio$, fim)

```
1 pivo = A[fim]
2 i = inicio
3 para j = inicio até fim − 1 faça
4     se A[j] ≤ pivo então
5         troca A[i] e A[j]
6         i = i + 1
7 troca A[i] e A[fim]
8 retorna i
```

Subrotina Particiona

- Tempo de execução = $O(n)$, em que n é o tamanho do (sub)vetor
- Custo $O(1)$ para cada elemento do (sub)vetor
- Claramente não usa memória extra (inplace), poi faz trocas repetidas no mesmo (sub)vetor

Corretude Particiona

- O laço mantém as invariantes:
  1. Todos os elementos de $A[inicio..i-1]$ são menores que o pivô p
  2. Todos os elementos de $A[i..j]$ são maiores que p
- Ao final do laço temos $A[inicio..i-1]$ menor que p e $A[i..fim-1]$ maior que p
- Trocar $A[fim]$ com $A[i]$ coloca o último elemento na posição correta, e não altera o invariante já que $A[i]$ é maior que p.
- Ao final da execução, o (sub)vetor está pariticionado ao redor de p.

Corretude Quicksort

Complexidade Quicksort

- A análise do QuickSort depende da escolha do pivô.
- No **pior caso**, EscolhePivo sempre retorna o maior (ou menor) elemento, de maneira que temos dois subvetores de tamanho 0 e $n-1$. Nesse caso, a equação de recorrência é:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + n + (n-1) \\
&\vdots \\
&= T(1) + \sum_{i=2}^{n-1} i \\
&= 1 + \frac{(n+1)(n-2)}{2} \\
&= \Theta\left(n^2\right)
\end{aligned}
$$

Complexidade Quicksort

- No **melhor caso**, EscolhePivo sempre retorna a mediana , de maneira que temos dois subvetores de tamanho $n/2$. Nesse caso, a equação de recorrência é:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= \Theta\left(n \log n\right) \end{aligned}$$

Complexidade Quicksort

- Em um **caso intermediário**, EscolhePivo divide o vetor original em duas partes de tamanho pn e $(1-p)n$, em que $0 < p < 1$ é a proporção de elementos em uma das partições.
- Nesse caso, a equação de recorrência é:

$$T(n) = T(pn) + T((1-p)n) + n$$

- Seja $k = p^{-1}$, podemos reescrever a recorrência como

$$T(n) = T\left(\frac{n}{k}\right) + T\left(\frac{k-1}{k}n\right) + n$$

Complexidade Quicksort

- Nesse caso, podemos provar que $T(n) = O(n \log n)$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n/k) + T((k-1)n/k) + n \\
&\leq c\left(\frac{n}{k}\log\left(\frac{n}{k}\right)\right) + \frac{n}{k} + c\left(\frac{(k-1)n}{k}\log\left(\frac{(k-1)n}{k}\right)\right) + \frac{(k-1)n}{k} + n \\
&= c\left(\frac{n}{k}\log\left(\frac{n}{k}\right)\right) + c\left(\frac{(k-1)n}{k}\left(\log(k-1) + \log\left(\frac{n}{k}\right)\right)\right) + 2n \\
&= cn\log n + n - cn\log k + \left(\frac{c(k-1)n}{k}\log(k-1) + n\right) \\
&\leq cn\log n + n
\end{aligned}
$$

que é válida se $c > k/(\log k)$ pois nesse caso temos:

$$cn \log k \geq \left(\frac{c(k-1)n}{k} \log(k-1) + n \right)$$

Complexidade Quicksort

- Portanto, temos que QuickSort é $O(n \log n)$ se garantirmos que Particiona divide o vetor A de tamanhos aproximadamente n/k e $(k-1)n/k$
- Apesar de contraintuivo, podemos observar que o tamanho da árvore de recursão é $\log_{k/(k-1)n} n = \Theta(\log n)$, e em cada passo executamos algo proporcional a n
- Qualquer divisão que não deixe um subvetor vazio já seria boa o suficiente (assintoticamente falando)

Complexidade Quicksort

- O problema dessa análise´e que´e improvável que a partição seja sempre feita da mesma maneira em todas as chamadas recursivas.
- Vamos fazer uma análise probabilistica do algoritmo
- Para isso, vamos analisar o que acontece no **caso medio**, em que cada uma das $n!$ possíveis permutações dos elementos de A tem a mesma chance de ser a ordenação do vetor de entrada A.

Complexidade Quicksort

- Seja $X_{a,b}$ uma variável aleatória que que indica se o elemento x_a é comparado com o elemento x_b

$$X_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_a \text{ é comparado com } x_j \\ 0 & \text{se } x_a \text{ não é comparado com } x_j d \end{cases}$$

- O número total de comparações é:

$$\sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{a,b}$$

Complexidade Quicksort

- O valor médio esperado $E[X_{a,b}]$ dá uma estimativa do número médio esperado de comparações de $X_{a,b}$

$$
\begin{aligned}
E[X_{a,b}] &= E\left[\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n} X_{a,b}\right] \\
&= \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n} E\left[X_{a,b}\right] \\
&= \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n} (P_{a,b}=1)\times 1 + (P_{a,b}=0)\times 0 \\
&= \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n} (P_{a,b}=1)
\end{aligned}
$$

Complexidade Quicksort

- Recorde que no Quicksort, os elmentos são comparados apenas com o pivô. Após uma rodada de Particiona, o pivô migra para a posição final e não é mais comparado com ninguém.
- Portanto, podemos analisar a probabilidade de comparar dois elementos considerando as suas posições finais, relativamente à probabilidade de um elmento virar pivô em um determinado instante.

Complexidade Quicksort

- Seja $o_1, o_2, \cdots, o_n$ os elementos de A em ordem (depois de ordenados), ou seja, $o_1 \leq o_2 \leq \cdots \leq o_n$
- Dados dois elementos quaisquer o_a e o_b, $a < b$ eles são comparados (no máximo) uma única vez pois quando (qualquer) um deles for pivô.
- Ele é colocado na posição correta, e o outro estará a sua direita ou a sua esquerda, e o pivô não é comparado com mais ninguém.

Complexidade Quicksort

- Seja $P_{a,b} = 1$ a probabilidade de comparar os elementos o_a e o_b.
- Dado o subvetor $O[a..b] = [o_a, o_{a+1}, \cdots, o_b]$, $P_{a,b}$ é igual a probabilidade de o_a ou o_b sejam escolhidos como pivô.
  - Se algum outro elemento $o_i, a < k < b$ for escolhido como pivô, então o_a e o_b vão para partes diferentes no final de Particiona com o_i pivô, e nunca serão comparados
- Se qualquer elemento de $O[a..b]$ tiver **igual probabilidade** de ser selecionado como pivô, como temos $b - a + 1$ elementos em $O[a..b]$, temos que

$$(P_{a,b} = 1) = \frac{2}{b - a + 1}$$

Complexidade Quicksort

- Substituindo na equação do valor experado temos que:

$$E[X_{a,b}] = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} (P_{a,b} = 1)$$

$$= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \frac{2}{b-a+1}$$

Complexidade Quicksort

Complexidade Quicksort

- Portanto, concluímos que o tempo medio de execução do Quicksort´e $O(n \log n)$.
- Se, em vez de escolhermos um elemento fixo para ser o pivô, escolhermos um dos elementos do (sub)vetor com probabilidade uniforme, então uma análise análoga a que fizemos aqui mostra que o tempo esperado de execução dessa versão aleatória de Quicksort´e $O(n \log n)$.
- Assim, sem supor nada sobre a entrada do algoritmo, garantimos um tempo de execução esperado de $O(n \log n)$.