

Observem bem que esta prova não é para ser feita inteira num tempo de duas horas. A ideia é de saber escolher o que se sabe fazer primeiro e o que não se sabe fazer deixa-lo para depois ter feito o que se sabe fazer. É esperado que pelo menos o aluno não zere a soma da pontuação dos primeiros 4 problemas.

1. (1 Ponto) (Feito em sala de aula) Provar o seguinte teorema. Sejam V um espaço vetorial, $U, W \leq V$. Então $U + W \leq V$, é subespaço vetorial de V .
2. (1 Ponto) (Feito em sala de aula) Provar o seguinte teorema. Sejam V um espaço vetorial, $U, W \leq V$. Então $U \cap W \leq V$, é subespaço vetorial de V .
3. Sejam

$$U := \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle, W := \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

- (a) (2 pontos) (Feito em sala de aula) Determinar uma base de $U + W$ e de $U \cap W$ com o algoritmo de Zassenhaus.
 - (b) (2 pontos) (Feito em sala de aula) Determinar uma base de $U \cap W$ escrevendo U e W como espaço de soluções de um sistema homogêneo usando o método da permanência do posto. Mostrar as verificações.
 - (c) (2 pontos) (Feito em sala de aula) Determinar uma base de $U \cap W$ escrevendo U e W como espaço de soluções de um sistema homogêneo, calculando primeiro $U^\perp$ e $W^\perp$, com as respectivas bases e depois usar estas bases para encontrar os sistemas homogêneos desejados. Mostrar as verificações.
4. (2 Pontos) (Feito em sala de aula) Aplicar o algoritmo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal para

$$U := \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle \leq \mathbb{R}^4.$$

5. (2 Pontos) (Feito em sala de aula) Provar o seguinte teorema. (Teorema do Núcleo e da Imagem) Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Considerando a transformação linear $T : U \rightarrow V$, então

$$\dim(U) = \dim(\mathcal{N}(T)) + \dim(\text{Im}(T)),$$

onde $\mathcal{N}(T) := \{u \in U : T(u) = 0\}$ e $\text{Im}(T) := \{v \in V : \exists u \in U, \text{ tal que } T(u) = v\}$. Isto é, se A é uma matriz m -por- n (com m linhas e n colunas) sobre um corpo, então:

$$\text{Posto}(A) + \text{Nulidade}(A) = n.$$

6. (2 Pontos) Provar o seguinte teorema. Sejam V um espaço vetorial, $U, W \leq V$. Então

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$