Primeira Prova bis de Análise Real
Licenciatura em Matemática noturno
UFRJ

Stefano Nardulli

23/02/2016

Durao de 10:00 horas às 14:00 horas, permitido só o uso da caneta ou do lapis, no é permitido ir no banheiro, não é possível sair antes de 1 hora do início da prova e não é permitido entrar para fazer a prova depois de 1/2 hora do início da prova.

1. Provar que se $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo, então $\mathbb{K}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$. (Feito em aula)

2. Provar que se $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo, então $\mathbb{K}$ é Arquimediano. (Feito em aula)

3. Provar que para qualquer X conjunto arbitrário e Y um conjunto com pelo menos 2 elementos não existe nenhuma função sobrejetora $\varphi : X \to Y^X$, onde $Y^X := \{f : X \to Y\}$.

4. Mostrar que dada uma família de conjuntos $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, onde os X_i são conjuntos enumeráveis infinitos o produto cartesiano $\Pi_{i\in\mathbb{N}} X_i$ não é enumerável.

5. Mostrar que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado Arquimediano, mas que $\mathbb{Q}$ não é completo. (Feito em aula)

6. Dar um exemplo de corpo não Arquimediano. Sugestão: considerar o corpo das funções racionais com a ordem lexicográfica ou a reta hyperreal. (Feito em aula)

7. Sejam, $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ duas sequências de números reais limitadas. Mostrar que

$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n,$$

$$\liminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \ge \liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n.$$

   Dar un exemplo que mostra que em geral não vale o sinal de igualdade.

8. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo no necessariamente limitado. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função injetiva e contínua. Então f é monótona, sua imagem $J = f(I)$ um intervalo e sua inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ é contínua.

9. Mostrar que $n^k \leq \frac{9}{8}(\min\{n,k\})^{\max\{n,k\}}$, para todo $n, k \in \mathbb{N}$, com $n, k \geq 2$. Sugestão: considerar primeiro o caso $n \leq k$ que trivial. Depois no caso $n > k \leq 3$, relacionar a desigualdade a mostrar que a função $\log(x)/x$ é decrescente em um oportuno intervalo. Quando $k = 2$, usar o princípio de indução.

10. Mostrar que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, A fechado e limitado. (Feito em aula)

11. Mostrar que toda função contínua num subconjunto compacto da reta é uniformemente contínua. (Feito em aula)

12. Mostrar que se $F_1, F_2, ..., F_n, ...$ são fechados com interior vazio então $S = \bigcup_n F_n$ tem interior vazio. (Teorema de Baire)

13. Mostrar que toda função contínua monótona limitada $f : I \to \mathbb{R}$, é uniformemente contínua.