P2 Análise Real I
Bacharelado em Matemática
UFABC

Stefano Nardulli

24/08/2018

1. Enunciar e provar a formula de Taylor com resto de Lagrange.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\phi_n(x) = x^n|x|$.

   (a) Mostrar que $\phi_n' = (n+1)\phi_{n-1}$ e usar este resultado para achar uma expressão de $\phi_n^{(n)}$ em função de ϕ_0.

   (b) Mostrar que $\phi_n \in C^n(\mathbb{R})$, mas que não é $n+1$-vezes derivável.

3. Provar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ se $x = 0$ é de classe C^∞.

4. Seja $\alpha \in]0, +\infty[$,
$$\varphi_\alpha(x) := \begin{cases} \frac{e^{-\frac{\alpha}{1-x^2}}}{e^{-\alpha}}, |x| \leq 1, \\ 0, |x| \geq 1. \end{cases}$$
   Mostrar que $\varphi_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $||\varphi_\alpha||_\infty \leq 1$.

5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo aberto, f duas vezes derivável em I. Provar que, para que f seja convexa é necessário e suficiente que $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$.

6. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo. Se existe $\alpha > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$, para quasiquer $x, y \in I$, então f é continua e possui derivada nula em todos os pontos de I. Provar que consequentemente f é constante.

7. Seja $f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivável. Se existem $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b$, então $b = 0$.

8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua, derivável em $]a, b[$. Suponha $f(a) = f(b) = 0$. Então, dado arbitrariamente $k \in \mathbb{R}$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = kf(c)$.

9. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, derivável num intervalo. Uma raiz de f é um ponto $c \in I$, tal que $f(c) = 0$. Entre duas raizes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f. Use este fato para mostrar que que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ possui exatamente uma raiz no intervalo $]1, 3[$.

10. Se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é derivável e $lim_{x \to +\infty} f'(x) = L$, então para cada $c > 0$, $\lim_{x \to +\infty} [f(x + c) - f(x)] = c \cdot L$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = L$.