

Segunda Prova  
Licenciatura em Matemática diurno  
UFRJ

Stefano Nardulli

26/02/2016

Duração das 13:00 horas às 15:00 horas, permitido o uso da caneta ou do lápis, no permitido ir no banheiro, no possível sair antes de 1 hora do início da prova e no permitido entrar para fazer a prova depois de 1/2 hora do início da prova.

1. Fazer a construção dos números reais com os cortes de Dedekind. (Feito em aula)
2. Provar a desigualdade geométrico-aritmética. Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ , então

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (1)$$

(Feito em aula).

3. Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ . Prove que  $a + b\sqrt{2} = c + \sqrt{2}d$ , se e só se  $a = c$ ,  $b = d$ .
4. Prove que o conjunto  $\mathbb{K}$  dos números reais da forma  $a + b\sqrt{2}$ , com  $a$  e  $b$  racionais é um corpo relativamente às operações de adição e multiplicação de números reais. Examine se isso ocorre também com os números da forma  $a + b\sqrt{2}$ , com  $a$  e  $b$  pertencentes a  $\mathbb{Q}$ .
5. Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos de números reais positivos. Definamos  $AB := \{xy : x \in A, y \in B\}$ . Prove que se  $A$  e  $B$  forem limitados então  $AB$  é limitado sendo  $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$  e  $\inf(AB) = \inf(A)\inf(B)$ .
6. Sejam  $B \subseteq A$  conjuntos não-vazios de números reais. Suponha que  $A$  seja limitado superiormente e que para cada  $x \in A$  exista  $y \in B$  tal que  $x \leq y$ . Prove que, nestas condições, tem-se  $\sup(B) = \sup(A)$ . Enuncie e demonstre um resultado análogo para  $\inf$ .
7. Um número real  $r$  chama-se **algébrico** quando existe um polinômio  $P$  não identicamente nulo com coeficientes inteiros tal que  $P(r) = 0$ .
  - (a) Prove que o conjunto dos polinômios de coeficientes inteiros é enumerável.

- (b) Conclua que O conjunto dos números algébricos  $A$  é enumerável.
- (c) Mostre que  $A$  é denso em  $\mathbb{R}$ .
8. Seja  $a \in ]0, +\infty[$ . Dado um número racional  $p/q$  com  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{N}$ , defina a potência de base  $a$  e expoente racional  $p/q$  como  $a^{p/q} := b$  tal que  $b^q = a^p$ . Prove que
- (a) Para quaisquer  $r, s \in \mathbb{Q}$  tem-se  $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$  e  $(a^r)^s = a^{rs}$ .
- (b) Para todo  $r \in \mathbb{Q}^+$  a função  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$ , dada por  $f(x) = x^r$ , é uma bijeção crescente.
- (c) A função  $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(r) = a^r$ , (onde  $a$  é um número real positivo fixado) é crescente se  $a > 1$  e decrescente se  $0 < a < 1$ .
9. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um isomorfismo de  $\mathbb{R}$  em si mesmo. Prove que  $f = \text{identidade}$ . Conclua que se  $\mathbb{K}$  e  $\mathbb{L}$  são corpos ordenados completos, existe um único isomorfismo de  $\mathbb{K}$  sobre  $\mathbb{L}$ . (Feito em aula)
10. Verifique que  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  definida por  $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  é uma bijeção de  $\mathbb{R}$  sobre o intervalo  $] - 1, 1[$ .