Lista P1 Matemática Discreta
Stefano Nardulli

1. Enunciar o Princícipio de indução forte.

2. (a) Enunciar e demonstrar o Teorema de Bézout.
   (b) Enunciar e demonstrar o Teorema fundamental da aritmética.

3. Sejam A, B dois conjuntos finitos, tais que existe uma função sobrejetora $f : A \to B$. Então $Card(A) \geq Card(B)$.

4. Sejam A, B dois conjuntos finitos, tais que existe uma função injetora $f : A \to B$. Então $Card(A) \leq Card(B)$.

5. Provar que $f : A \to B$ é sobrejetora, se e só se, existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f : A \to A$ é igual à identidade, i.e., $g \circ f = Id_A$, onde $Id_A(x) = x$, para todo $x \in X$.

6. Enunciar e provar as duas leis de De Morgan.

7. Provar que toda relaÃ§ao de equivalência determina uma partiçao e reciprocamente.

8. Definir $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ a partir de $\mathbb{N}$, provar que as operações são bem definidas, depois usando as propriedades algébricas usuais de de $\mathbb{N}$ e que vale a propriedades distributiva em $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

9. Definir $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ a partir de $\mathbb{Z}$, provar que as operações são bem definidas, depois usando as propriedades algébricas usuais de de $\mathbb{Z}$ e que vale a propriedades distributiva em $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

10. Provar que todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

11. Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos enumeráveis. Pondo $S := \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Então S é enumerável.

12. Seja $\{E_n\}_{n \in \{1,\ldots,k\}}$ um conjunto finito de conjuntos enumeráveis. Pondo $S := \times_{n \in \{1,\ldots,k\}} E_n$. Então S é enumerável.

13. Provar que $\mathbb{R}$ não é enumerável.

14. (O algoritmo da divisão) Provar que, se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$, então existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$, com $a = qb + r$, $0 \leq r < b$.

15. Enunciar e provar o Teorema Chines do resto.

16. Enunciar e provar o Teorema da divisão de Euclide, para achar o máximo comum divisor $gcd(a, b)$, onde $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

17. Enunciar e provar o Teorema de Pitagora.

18. Provar o Princípio de induçao usando o axioma de boa ordem, Teorema 4.1 do Livro do Grimaldi.

19. Provar por inducao que $C_{n,k} = C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1}$, onde $C_{n,k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

20. Calcular $\sum_{i=3}^{n} (2i-1)^3$.

21. Calcular $\sum_{i=3}^{n} (2i-1)^2$.

22. Fazer todos os exercícios do livro do Grimaldi da seção 4.1.

23. Fazer todos os exercícios da seção 3.1 do Grimaldi (teoria dos conjuntos).