

Primeira Prova de Teoria da medida
Bacharelado em Matemática
UFABC

Stefano Nardulli

21/07/2018

1. Encontrar um exemplo de uma medida σ -aditiva μ sobre uma σ -álgebra $\mathcal{A}$ tal que existe uma sequência $A_n \in \mathcal{A}$ com $A_n \rightarrow A$, $A_{n+1} \subseteq A_n$ and $\inf\{\mu(A_n)\} > \mu(A)$.
2. Seja μ aditiva e finita, sobre uma σ -álgebra $\mathcal{A}$. Show that μ is σ -aditive, se e só se é contínua a respeito de seqüências não crescentes de conjuntos.
3. Seja μ uma medida finita sobre $(X, \mathfrak{M})$, dizemos que $x \in X$ é um **átomo de μ** , se $\{x\} \in \mathfrak{M}$ e $\mu(\{x\}) > 0$. Denotamos o conjuntos dos átomos de μ com $A_\mu := \{x \in X | \{x\} \in \mathfrak{M}, \mu(\{x\}) > 0\}$. Provar que A_μ é enumerável. Mostrar o mesmo resultado para toda medida μ σ -finita. Fornecer um exemplo de um espaço de medida para o qual esta propriedade não pode ser satisfeita.
4. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida finita. Dizemos que μ é **difusa**, se para todo $A \in \mathfrak{M}$ com $\mu(A) > 0$ existe $B \subseteq A$ com $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Mostrar que se μ é difusa então $\mu(\mathfrak{M}) = [0, \mu(X)]$.
5. Mostrar que se X é um espaço métrico separável e $\mathcal{B}$ é a σ -álgebra de Borel. Então uma medida σ -aditiva $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty[$ é difusa se e só se $A_\mu = \emptyset$.
- 6.

Definição 1. *Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ são **conjuntos separados**, se $d(A, B) := \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\} > 0$. Dizemos que uma medida μ sobre X é **aditiva sobre conjuntos separados**, se $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, sempre que A e B são conjuntos separados.*

Provar o seguinte teorema.

Teorema 0.1 (Critério de Carathéodory). *Seja (X, d) um espaço métrico. Se μ é uma medida exterior aditiva sobre conjuntos separados, então todo conjunto de Borel é μ -mensurável.*

7. Enunciar e demonstrar o Teorema de convergência monotona de Lebesgue.

8. Enunciar e demonstrar o Lema de Fatou.
9. Enunciar e demonstrar o Teorema de convergência dominada de Lebesgue.
10. Como consequência do Teorema de convergência dominada de Lebesgue podemos provar que, se $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, é μ integrável. Então $\forall \varepsilon > 0$, δ_ε tal que $\forall A \in \mathfrak{M}$ com $\mu(A) < \delta_\varepsilon$ resulta $\int_A |\varphi| d\mu \leq \varepsilon$.
11. Seja (a_n) uma sequência com $a_n \in]0, +\infty[$ tal que $\sum_n a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, mostrar que para toda $\varphi : X \rightarrow [0, +\infty]$, mensurável existe $A_n \in \mathfrak{M}$ tal que $\varphi = \sum_n a_n \chi_{A_n}$.
12. Definir a integral de Lebesgue em termos da função de repartição e mostrar a sua relação com a definição dada em termos de integral de funções simples.